# Devoir-Maison 5

**Exercice 0.1.** *Dans tout ce qui suit, $n$ désigne un entier naturel non nul. On définit alors une application $\varphi$ par :*

$$\varphi :\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]\times\mathbb{R}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\mathrm{P},\mathrm{Q}) & \longmapsto & \int_0^1 t^2\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

*Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.*

**Exercice 0.2.**

1. *Justifier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ pour tout $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.*

   *On admet que l'application $\varphi$ définie par :*

   $$\varphi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

   *définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.*

2. *Soient $h : x\longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ et pour $n\in\mathbb{N}, \mathrm{H}_n : x\longmapsto (-1)^n\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}h^{(n)}(x)$.*
   (a) *Trouver une relation entre $\mathrm{H}_{n+1}, \mathrm{H}_n$ et $\mathrm{H}'_n$.*
   (b) *Montrer que $\mathrm{H}_n$ est un polynôme de degré $n$.*
   ***Indication :*** *on pourra raisonner par récurrence.*
   (c) *Montrer que :*

   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{H}_{n+1} = \mathrm{X}\mathrm{H}_n - n\mathrm{H}_{n-1}$$

   *et en déduire que :*

   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathrm{H}'_n = n\mathrm{H}_{n-1}.$$

   (d) *Montrer que : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{H}_k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 0$.*

3. *Montrer que les polynômes d'Hermite sont orthogonaux pour le produit scalaire défini précédemment.*