Devoir Surveillé 1 - CORRECTION

Durée : 2 heures

Exercice 0.1. *Le plan est muni d'un repère orthonormé direct* $\mathscr{R} = (0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit $\mathscr{D}$ *la droite dont une représentation paramétrique est* $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

1. *Donner une équation cartésienne de* $\mathscr{D}$.
   On sait que $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *est un vecteur directeur de* $\mathscr{D}$ *et que* $A(3; -1) \in \mathscr{D}$. *Donc :*

   $M(x; y) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\right] = 0$ *avec* $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$
   $\Leftrightarrow -(y + 1) - 2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow -2x - y + 5 = 0$

   Donc $\mathscr{D} : 2x + y - 5 = 0$.
2. *On considère la famille de droites* (Δ_m) *d'équations cartésiennes*

   $$(\Delta_m) : mx + (m - 1)y + 2 = 0$$

   Donner la valeur de m *telle que* (Δ_m) *est parallèle à* $\mathscr{D}$.
   On sait que $\overrightarrow{v_m} \begin{pmatrix} 1-m \\ m \end{pmatrix}$ *est un vecteur directeur de* (Δ_m) *donc :*

   $$(\Delta_m)//\mathscr{D} \Leftrightarrow [\overrightarrow{v_m}; \overrightarrow{u}] = 0 \Leftrightarrow 2(1 - m) + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

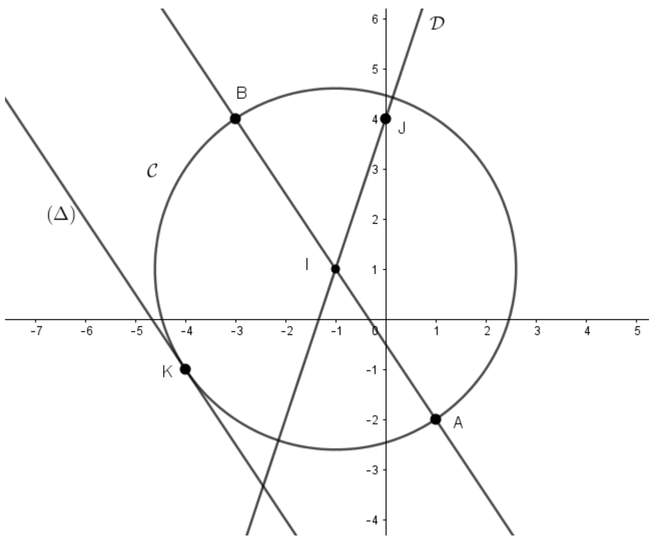
3. *Déterminer les coordonnées du point d'intersection de* (Δ_m) *et* $\mathscr{D}$ *lorsqu'elles sont sécantes.*
   Soit $m \in \mathbb{R}-\{2\}$ *alors :* $M(x; y) \in \mathscr{D}\cap(\Delta_m) \Leftrightarrow \begin{cases} mx + (m - 1)y + 2 = 0 \\ x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow$
   $\begin{cases} m(3 - t) + (m - 1)(-1 + 2t) + 2 = 0 \\ x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mt + 2m + 3 - 2t = 0 = 0 \\ x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow$
   $\begin{cases} t = \frac{-2m-3}{m-2} \text{ car } m \in \mathbb{R} - \{2\} \\ x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-2m-3}{m-2} \text{ car } m \in \mathbb{R} - \{2\} \\ x = 3 - \frac{-2m-3}{m-2} = \frac{5m-3}{m-2} \\ y = -1 + 2 \times \frac{-2m-3}{m-2} = \frac{-5m-4}{m-2} \end{cases}$
   Lorsque $m \in \mathbb{R} - \{2\}$, *les droites* (Δ_m) *et* $\mathscr{D}$ *sont sécantes en le point* $I_n(\frac{5m-3}{m-2}; \frac{-5m-4}{m-2})$.

4. *Soit le point $B(-2;2)$. Calculer la distance du point B à la droite (Δ_m). Que peut-on en conclure ?*
   $d(B,(\Delta_m)) = \frac{|mx_B+(m-1)y_B+2|}{\sqrt{m^2+(m-1)^2}} = \frac{|-2m+2(m-1)+2|}{\sqrt{m^2+(m-1)^2}} = 0$

Exercice 0.2. *On donne dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:*

$$A(1;-2),\ B(-3;4) \text{ et } \mathscr{D} : 3x - y + 4 = 0$$

1. *Donner deux points à coordonnées entières de la droite $\mathscr{D}$, tracer la droite $\mathscr{D}$ puis placer les points A et B.*
   $\mathscr{D} : 3x-y+4 = 0$ donc pour obtenir deux points à coordonnées entières, on peut poser par exemple :
   - *$x = 0$ alors $y = 4$ et $P_1(0;4) \in \mathscr{D}$*
   - *$x = 1$ alors $y = 7$ et $P_2(1;7) \in \mathscr{D}$*



2. *Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).*
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) donc $(AB) : ax+by+c = 0$ avec $-b = -4$ et $a = 6$. Il vient :$(AB) : 6x + 4y + c = 0$.
   Or $A(1;-2) \in (AB)$ donc : $6 \times 1 + 4 \times (-2) + c = 0 \Leftrightarrow c = 2$. Finalement : $(AB) : 6x + 4y + 2 = 0$ ou $(AB) : 3x + 2y + 1 = 0$

3. *On note I le point d'intersection des droites (AB) et $\mathscr{D}$, déterminer par le calcul les coordonnées du point I et vérifier graphiquement le résultat obtenu.*
   Les coordonnées de I (si elles existent) vérifient le système d'équations $\begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 \\ 3x - y + 4 = 0 \end{cases}$ Par combinaison, en soustrayant membre à

membre, on obtient $(3x+2y+1)-(3x-y+4)=3y-3=0 \Leftrightarrow y=1$. *D'où* $3x+2y+1=0 \Leftrightarrow 3x+3=0 \Leftrightarrow x=-1$. *Donc* $I(-1;1)$.

4. *Soit* J *le point de* $\mathscr{D}$ *d'abscisse nulle, déterminer la distance de* J *à la droite* (AB).
   On sait que $x_J=0$ *et que* $J \in \mathscr{D} : 3x-y+4=0$ *donc* $-y_J+4=0$ *et* $y_J=4$. *Finalement* $J(0;4)$.
   Nous savons que $d(J,(AB))=\frac{|3x_J+2y_J+1|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{9}{\sqrt{13}}=\frac{9\sqrt{13}}{13}$.
5. *Soit le point* $C(-3;3)$ *et* H *le projeté orthogonal de* C *sur la droite* $\mathscr{D}$. *Placer* H *sur le repère puis déterminer les coordonnées du point* H *par le calcul.*
   Nous savons que $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ *est un vecteur normal de* $\mathscr{D}$. *Il existe donc* $k \in \mathbb{R}$ *tel que* $\overrightarrow{CH}=k\overrightarrow{n}$. *Il vient :*
   $$\overrightarrow{CJ}\cdot\overrightarrow{n}=(\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HJ})\cdot\overrightarrow{n}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{n}=k\times\|\overrightarrow{n}\|^2$$
   Or $\overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ *donc* $\overrightarrow{CJ}\cdot\overrightarrow{n}=3^2-1=8$ *et* $k=\frac{\overrightarrow{CJ}\cdot\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|^2}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$.
   D'où $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\\frac{-4}{5}\end{pmatrix}$ *et*
   $$\left\{\begin{array}{l} x_H-x_C=\frac{12}{5}\\ y_H-y_C=\frac{-4}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_H=\frac{12}{5}-3=\frac{-3}{5}\\ y_H=\frac{-4}{5}+3=\frac{11}{5}\end{array}\right.$$
   Finalement $H(\frac{-3}{5};\frac{11}{5})$.
6. *Soit* $\mathscr{C}$ *le cercle d'équation* $x^2+y^2+2x-2y-11=0$. *Déterminer les coordonnées du centre ainsi que le rayon de ce cercle.*
   $$x^2+y^2+2x-2y-11=0 \Leftrightarrow (x+1)^2-1+(y-1)^2-1-11=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=13$$
   $\mathscr{C}$ *est donc le cercle de centre* $I(-1;1)$ *et de rayon* $\sqrt{13}$.
7. *Déterminer les éventuels points d'intersection entre le cercle* $\mathscr{C}$ *et la droite* $\mathscr{D}$.
   Les coordonnées d'éventuels points d'intersection vérifient le système :
   $$\left\{\begin{array}{l} 3x-y+4=0\\ x^2+y^2+2x-2y-11=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
   $$\left\{\begin{array}{l} y=3x+4\\ x^2+(3x+4)^2+2x-2(3x+4)-11=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
   $$\left\{\begin{array}{l} y=3x+4\\ 10x^2+20x-3=0\end{array}\right.$$

$\Delta = 520 = 4 \times 130 > 0$. *Il existe donc deux points d'intersection entre le cercle et la droite :*

- *si* $x = \frac{-20-2\sqrt{130}}{20} = -1 - \frac{\sqrt{130}}{10}$ *alors* $y = 3x + 4 = 1 - \frac{3\sqrt{130}}{10}$
- *si* $x = \frac{-20+2\sqrt{130}}{20} = -1 + \frac{\sqrt{130}}{10}$ *alors* $y = 3x + 4 = 1 + \frac{3\sqrt{130}}{10}$

Les deux points d'intersection sont donc $M(-1 - \frac{\sqrt{130}}{10}; 1 - \frac{3\sqrt{130}}{10})$ *et* $N(-1 + \frac{\sqrt{130}}{10}; 1 + \frac{3\sqrt{130}}{10})$

8. *Donner une équation de la droite* (Δ)*, tangente au cercle en* $K(-4;-1)$.
La droite (Δ) *admet* $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ *comme vecteur normal donc possède une équation cartésienne du type :* $-3x - 2y + c = 0$.
Or $K(-4;-1) \in (\Delta)$ *donc* $-3 \times (-4) - 2 \times (-1) + c = 0 \Leftrightarrow c = -14$.
Finalement $(\Delta) : -3x - 2y - 14 = 0$.

Exercice 0.3. *Soit la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$.

1. *Factoriser* $f(x)$ *le plus possible.*
On observe que $f(-1) = 0$ *donc* $f(x)$ *est factorisable par* $x + 1$.
On cherche donc $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ *tel que :* $f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.

$$(x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c$$
$$= ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c$$

Par identification des coefficients, on a donc :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b + a = -1 \\ c + b = -5 \\ c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 - a = -1 - 2 = -3 \\ c = -5 - b = -5 + 3 = -2 \\ c = -2 \end{cases}$$

Ainsi : $f(x) = (x+1)(2x^2 - 3x - 2)$.
Peut-on factoriser $2x^2 - 3x - 2$ *?* $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 5^2$
donc deux racines : $x_1 = \frac{3-5}{4} = \frac{-1}{2}$ *et* $x_2 = \frac{3+5}{4} = 2$.
D'où $f(x) = 2(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-2)$.

2. *Résoudre l'inéquation* $f(x) > 0$.
On dresse un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		$\frac{-1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2 - 3x - 2$		-	0	+	0	-	0	+	
$x + 1$		-	0	+	0	+	0	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

D'où $\mathscr{S} = \left]-1; \frac{-1}{2}\right[\cup]2 : +\infty[$

3. *Résoudre l'équation* $\frac{2x^3-x^2-5x-2}{2x+1} = 0$.
   $Df = \{x \in \mathbb{R}, 2x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{2}\right\}$.
   D'après la question précédente :

$$2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x+1)(x+\tfrac{1}{2})(x-2) = 0.$$

   Or $\frac{-1}{2} \notin Df$ *donc :*

$$\mathscr{S} = \{-1; 2\}$$