Concours blanc 2024 - CORRECTION

Durée : 4 heures
Calculatrice interdite

Exercice 1 - Polynômes de Tchebychev (Concours EPITA-IPSA-ESME PT-TSI 2023)

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ ceux de degré au plus n.
Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, on désigne par $\mathrm{cd}(P)$ son coefficient dominant et par $\deg(P)$ son degré.

Partie 1 - Quelques propriétés
Soit (T_n) la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{ccc} T_0 & = & 1 \\ T_1 & = & X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} & = & 2XT_{n+1} - T_n \end{array}\right.$$

1. Montrer que $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

   On calcule successivement
   $$T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$$
   puis
   $$T_3 = 2X\left(2X^2 - 1\right) - X = 4X^3 - 3X$$
   et enfin
   $$T_4 = 2X\left(4X^3 - 3X\right) - \left(2X^2 - 1\right)$$
   ce qui donne bien
   $$\boxed{T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1.}$$

2. Déterminer les racines carrées complexes de $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}i$. En déduire celles de $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}i$.
   On cherche les réels a et b tels que $z = a + \mathrm{i}b$ vérifie $z^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\mathrm{i}$. Cela impose
   $$a^2 + b^2 = |z|^2 = \frac{|4+3i|}{8} = \frac{5}{8}$$
   et par ailleurs
   $$z^2 = \left(a^2 - b^2\right) + 2\mathrm{i}ab.$$
   Alors
   $$z^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\mathrm{i} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\mathrm{i} \\ |z|^2 = \frac{5}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (a^2 - b^2) + 2\mathrm{i}ab = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\mathrm{i} \\ a^2 + b^2 = \frac{5}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 - b^2 = \frac{1}{2} \\ 2ab = \frac{3}{8} \\ a^2 + b^2 = \frac{5}{8} \end{array}\right.$$
   en égalisant les parties réelle et imaginaire, puis par $\left\{\begin{array}{l} L_1 \\ L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (L_1 + L_3)/2 \\ (L_3 - L_1)/2 \end{array}\right.$:
   $$z^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\mathrm{i} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 = 9/16 \\ ab = 3/16 \\ b^2 = 1/16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3/4 \\ b = 1/4 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} a = -3/4 \\ b = -1/4 \end{array}\right.$$
   car la relation $ab = \frac{3}{16}$ impose que a et b aient même signe.
   En conclusion, les racines carrées de $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\mathrm{i}$ sont :
   $$\boxed{\tfrac{3+\mathrm{i}}{4} \text{ et } -\tfrac{3+\mathrm{i}}{4}.}$$
   En conjuguant : $z^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\mathrm{i} \Leftrightarrow \overline{z}^2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\mathrm{i}$, donc les racines carrées et $\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\mathrm{i}$ sont :
   $$\boxed{\tfrac{3-\mathrm{i}}{4} \text{ et } \tfrac{-3+\mathrm{i}}{4}.}$$

3. En déduire les solutions complexes de l'équation $T_4(z) = -\dfrac{17}{8}$.

   On commence par écrire
   $$T_4\left(z\right) = -\frac{17}{8} \Leftrightarrow 8z^4 - 8z^2 + \frac{25}{8} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 8Z^2 - 8Z + \frac{25}{8} = 0 \\ Z = z^2 \end{array} \right. .$$
   Le discriminant de l'équation du second degré est $\delta = 64 - 100 = -36 = (6i)^2$ et les solutions sont $\frac{8+6\mathrm{i}}{16} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\mathrm{i}$ et $\frac{8-6\mathrm{i}}{16} = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\mathrm{i}$.
   Ainsi
   $$T_4\left(z\right) = -\frac{17}{8} \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\mathrm{i} \text{ ou } z^2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\mathrm{i}$$
   et avec les résultats de la question précédente on peut conclure que
   $$\boxed{T_4\left(z\right) = -\tfrac{17}{8} \Leftrightarrow z \in \left\{\tfrac{3+\mathrm{i}}{4}, \tfrac{-3-\mathrm{i}}{4}, \tfrac{3-\mathrm{i}}{4}, \tfrac{-3+\mathrm{i}}{4}\right\}.}$$

4. Montrer simultanément et par une récurrence double que $\mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}$,et $\deg(T_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Montrons donc par récurrence double sur $n \geq 1$ la propriété
   $$(H_n)\ :\quad \mathrm{cd}\left(T_n\right) = 2^{n-1} \text{ et } \deg\left(T_n\right) = n.$$
   Puisque $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$, (H_1) et (H_2) sont vérifiées.
   Supposons, pour $n \geq 1$, les propriétés (H_n) et (H_{n+1}) réalisées.
   Par définition l'on a $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
   Puisque $\deg\left(2XT_{n+1}\right) = \deg\left(2X\right) + \deg\left(T_{n+1}\right) = n + 2 > \deg\left(T_n\right) = n$, on a d'une part :
   $$\deg\left(T_{n+2}\right) = \max\left(\deg\left(2XT_{n+1}\right), \deg\left(T_n\right)\right) = n + 2$$
   et d'autre part :
   $$\mathrm{cd}\left(T_{n+2}\right) = \mathrm{cd}\left(2XT_{n+1}\right) = 2\mathrm{cd}\left(T_{n+1}\right) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$
   ce qui établit (H_{n+2}).
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \mathrm{cd}\left(T_n\right) = 2^{n-1} \text{ et } \deg\left(T_n\right) = n.}$$

5. Montrer que la fonction polynomiale associée à T_n a même parité que n.

   Montrer que T_n a même parité que n revient à démontrer que $T_n\left(-X\right) = \left(-1\right)^n T_n\left(X\right)$ soit
   $$T_n\left(X\right) = \left(-1\right)^n T_n\left(-X\right).$$
   Considérons la suite de polynômes $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
   $$\forall n \in \mathbb{N},\quad U_n\left(X\right) = \left(-1\right)^n T_n\left(-X\right).$$
   Elle vérifie $U_0 = T_0\left(-X\right) = 1 = T_0$, $U_1 = -T_1\left(-X\right) = X = T_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\begin{aligned} U_{n+2} &= \left(-1\right)^{n+2} T_{n+2}\left(-X\right) = \left(-1\right)^{n+2}\left(-2XT_{n+1}\left(-X\right) - T_n\left(-X\right)\right) \\ &= 2X\left(-1\right)^{n+1} T_{n+1}\left(-X\right) - \left(-1\right)^n T_n\left(-X\right) = 2XU_{n+1} - U_n. \end{aligned}$$
   Les suites $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(T_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ont mêmes deux premiers termes, et vérifient la même relation de récurrence d'ordre deux. Elles sont donc égales, ce qui établit le résultat attendu :

   Le polynôme T_n a même parité que n

On s'intéresse, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, aux polynômes vérifiant la relation $(\star_n)$:
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}(\mathbf{cos}(\theta)) = \mathbf{cos}(\mathbf{n}\theta)$$

6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ T_n\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$.

   On peut procéder de nouveau par récurrence double, ou considérer la suite de terme général $a_n = T_n\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$ avec $z \in \mathbb{C}^*$ fixé.
   D'après la relation de récurrence définissant $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right] T_{n+1}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) - T_n\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right). \\ &= \left(z+\frac{1}{z}\right) a_{n+1} - a_n \end{aligned}$$
   L'équation caractéristique associée est $r^2 - \left(z+\frac{1}{z}\right) r + 1 = 0$, de discriminant
   $$\Delta = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - 4 = z^2 + \frac{1}{z^2} - 2 = \left(z-\frac{1}{z}\right)^2$$
   donc de racines :
   $$r_1 = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}+\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) = z \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}-\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{z}.$$
   Il existe donc deux constantes k_1 et k_2 telles que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = k_1 z^n + k_2\left(\frac{1}{z}\right)^n.$$
   Mais $a_0 = 1$ et $a_1 = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ donc :
   $$\left\{\begin{array}{ccc} 1 & = & k_1 + k_2 \\ \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) & = & k_1 z + k_2 \frac{1}{z} \end{array}\right.$$
   et l'on constate que la solution $(k_1, k_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, attendue par l'énoncé, convient.
   On a bien établi :
   $$\boxed{\forall (n,z) \in \mathbb{N}\times\mathbb{C}^*, \quad T_n\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right).}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, en déduire que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

   Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On applique le résultat de la question précédente avec $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}^*$.
   D'une part
   $$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} = \cos(\theta)$$
   et d'autre part
   $$\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{2} = \cos(n\theta).$$
   On a donc bien établi :
   $$\boxed{\forall (n,\theta) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que T_n est le seul polynôme de $\mathbb{C}[X]$ à vérifier la relation $(\star_n)$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. La question précédente a montré que le polynôme T_n vérifie $(\star_n)$.
   Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme vérifiant $(\star_n)$. Alors pour tout réel θ :
   $$(T_n - P)(\cos(\theta)) = T_n(\cos(\theta)) - P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = 0$$
   donc pour tout réel $x \in [-1,1]$:
   $$(T_n - P)(x) = (T_n - P)(\cos(\arccos(x))) = 0.$$
   Puisque le polynôme $T_n - P$ admet une infinité de racines, c'est le polynôme nul, et $P = T_n$.
   Le polynôme T_n est le seul à vérifier la relation $(\star_n)$.

9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, en déduire une expression de $\cos(4\theta)$ en fonction de puissances de $\cos(\theta)$.
En utilisant la relation $(\star_4)$, on peut affirmer que $\cos(4\theta) = T_4(\cos(\theta))$ pour tout θ réel.
Il reste à exploiter la question 1 pour conclure que :
$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1.}$$
10. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(X^2-1)T_n'' + XT_n' - n^2T_n = 0$. On pourra dériver la relation $(\star_n)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Dérivons deux fois la relation $(\star_n)$. Pour tout θ réel :
$$-\sin(\theta)\, P'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$$
puis :
$$\sin^2(\theta)\, P''(\cos(\theta)) - \cos(\theta)\, P'(\cos(\theta)) = -n^2\cos(n\theta)$$
donc :
$$\left(\cos^2(\theta) - 1\right) P''(\cos(\theta)) + \cos(\theta)\, P'(\cos(\theta)) = n^2\cos(n\theta) = n^2 P(\cos(\theta)).$$
Ainsi le polynôme $Q = \left(X^2-1\right)P'' + XP' - n^2P$ vérifie $Q(\cos(\theta)) = 0$ pour tout θ réel.
Comme à la question 8, on en déduit que Q est le polynôme nul car il a une infinité de racines.
Puisque $P = T_n$, on a établi :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(X^2-1\right)T_n'' + XT_n' - n^2T_n = 0.}$$
11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
donc :
$$\boxed{\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \tfrac{2k+1}{2n}\pi.}$$
12. En déduire l'ensemble des racines de T_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons les réels $\theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$. Ce sont des réels distincts de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2n}, \frac{2n-1}{2n}\pi\right] \subset [0,\pi]$, et la fonction cosinus est injective sur $[0,\pi]$, donc les réels $x_k = \cos(\theta_k)$, $0 \leq k \leq n-1$, sont distincts deux à deux.
Avec la question précédente et la relation $(\star_n)$ on a $T_n(x_k) = T_n(\cos(\theta_k)) = \cos(n\theta_k) = 0$. On vient donc de mettre en évidence n racines distinctes de T_n.
Mais T_n est de degré n d'après la question 4, donc admet au plus n racines.
On a donc déterminé toutes les racines du polynôme T_n.
Les racines de T_n sont les réels :
$$\cos\left((2k+1)\tfrac{\pi}{2n}\right),\ 0 \leq k \leq n-1.$$

Partie 2 - Famille orthogonale

On considère l'application $< \cdot, \cdot >$ définie par :
$$\forall (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \in (\mathbb{R}[\mathbf{X}])^{\mathbf{2}},\ < \mathbf{P}, \mathbf{Q} > = \int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{P(t)Q(t)}}{\sqrt{\mathbf{1-t^2}}}\mathbf{dt}.$$

13. Montrer que $I_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ est convergente et vaut π.
La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur l'intervalle $]-1,1[$, et y admet pour primitive la fonction $t \mapsto \arcsin(t)$.
La fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(x)$ admet donc une limite finie en 1, égale à $\frac{\pi}{2}$.
Ainsi l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et est égale à $\frac{\pi}{2}$.
De même la fonction $x \mapsto \int_x^0 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin(x)$ admet $\frac{\pi}{2}$ pour limite finie en -1.
Ainsi l'intégrale $\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et est égale à $\frac{\pi}{2}$.
On en déduit, par définition, la convergence de I_0 et la valeur :
$$I_0 = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

L'intégrale I_0 est convergente et est égale π.

14. Montrer que l'application $< \cdot, \cdot >$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X]$.
Il s'agit de montrer que, pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ est convergente.
L'application PQ est continue sur $[-1, 1]$, donc bornée sur ce segment :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [-1, 1], \quad |P(t) Q(t)| \leq M.$$

On en déduit que :

$$\forall t \in]-1, 1[, \frac{|P(t)Q(t)|}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{M}{\sqrt{1-t^2}}$$

et la question précédente a montré que la fonction positive $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1, 1[$; il en est donc de même pour $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$.
Cela signifie que l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ est absolument convergente, ce qui implique qu'elle converge.

L'application $\langle\, .\, ,.\rangle$. est donc bien définie sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.

15. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
L'application est bien définie d'après la question précédente.
Elle est **symétrique** : pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$,

$$\langle Q, P\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{Q(t) P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{P(t) Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \langle P, Q\rangle .$$

Elle est **bilinéaire** : pour P, Q, R dans $\mathbb{R}[X]$ et α réel, par linéarité de l'intégrale

$$\langle P + \alpha Q, R\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t) R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \alpha \int_{-1}^{1} \frac{Q(t) R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \langle P, R\rangle + \alpha \langle Q, R\rangle$$

et par symétrie :

$$\langle R, P + \alpha Q\rangle = \langle P + \alpha Q, R\rangle = \langle P, R\rangle + \alpha \langle Q, R\rangle = \langle R, P\rangle + \alpha \langle R, Q\rangle .$$

Elle est **positive** : pour P dans $\mathbb{R}[X]$, par positivité de l'intégrale :

$$\langle P, P\rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}}_{\geq 0}\mathrm{d}t \geq 0.$$

Supposons enfin avoir, pour P dans $\mathbb{R}[X]$, $\langle P, P\rangle = 0$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $]-1, 1[$, elle est nulle sur cet intervalle.
On en déduit $P(t) = 0$ pour tout $t \in]-1, 1[$, et P est le polynôme nul puisqu'il admet une infinité de racines.
On peut conclure que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est bien un produit scalaire sur$\mathbb{R}[X]$.

On munit $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$.
On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire et définie par :

$$\forall \mathbf{P} \in \mathbb{R}[\mathbf{X}], \ \|\mathbf{P}\|_2 = \sqrt{< \mathbf{P}, \mathbf{P} >}.$$

16. Soit $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n.
Justifier que les intégrales I_n existent puis montrer que $I_1 = I_3 = 0$ et que $I_2 = \dfrac{\pi}{2}$.
On pourra utiliser le changement de variable $t = \cos(u)$.

Il suffit d'appliquer la question 14 avec par exemple $P = X^n$ et $Q = 1$ pour justifier l'existence de I_n.

Les intégrales I_n, $n \in \mathbb{N}$, sont convergentes.

Si n est un entier naturel impair, la fonction $t \mapsto \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}$ est impaire, donc d'intégrale nulle sur l'intervalle $]-1,1[$ (par le changement $u = -t$). Notamment $I_1 = I_3 = 0$.
L'application $u \mapsto t = \cos(u)$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$. Par théorème de changement de variable :

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{\cos^2(u)}{\sqrt{1-\cos^2(u)}} \sin(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{\cos^2(u)}{|\sin(u)|} \sin(u)\,\mathrm{d}u$$

donc, puisque $\sin(u) \geq 0$ pour $u \in]0,\pi[$:

$$I_2 = \int_0^\pi \cos^2(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2u)}{2}\mathrm{d}u = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

On a bien établi

$$\boxed{I_1 = I_3 = 0 \text{ et } I_2 = \tfrac{\pi}{2}.}$$

Remarque : le calcul de I_4 ne pose pas de problème, avec la question 9. Avec le même changement de variable :

$$I_4 = \int_0^\pi \cos^4(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{8}\int_0^\pi \Big(\cos(4u) + 8\cos^2(u) - 1\Big)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{\sin(4u)}{32}\right]_0^\pi + I_2 - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}.$$

On admettra par la suite que $I_4 = \dfrac{3\pi}{8}$.

17. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$.

Avec la question précédente et la question 13 :

$$\|1\|_2^2 = \langle 1,1\rangle = I_0 = \pi, \quad \|X\|_2^2 = \langle X,X\rangle = I_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \left\|X^2\right\|_2^2 = \left\langle X^2, X^2\right\rangle = I_4 = \frac{3\pi}{8}$$

et :

$$\langle X,1\rangle = I_1 = 0, \quad \left\langle X^2,1\right\rangle = \langle X,X\rangle = \frac{\pi}{2}, \quad \left\langle X, X^2\right\rangle = I_3 = 0.$$

Appliquons le procédé d'orthonormalisation.
On prend comme premier vecteur $E_0 = \frac{1}{\|1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.
On prend comme deuxième vecteur $E_1 = \frac{A_1}{\|A_1\|_2}$ où :

$$A_1 = X - \langle X, E_0\rangle E_0 = X - \frac{1}{\pi}\langle X,1\rangle 1 = X$$

donc $E_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}X$.
On prend comme troisième vecteur $E_2 = \frac{A_2}{\|A_2\|_2}$ où

$$A_2 = X^2 - \left\langle X^2, E_0\right\rangle E_0 - \left\langle X^2, E_1\right\rangle E_1 = X^2 - \frac{1}{\pi}\left\langle X^2, 1\right\rangle 1 - \frac{2}{\pi}\left\langle X^2, X\right\rangle X = X^2 - \frac{1}{2}$$

et :

$$\|A_2\|_2^2 = \left\|X^2\right\|_2^2 - 2\left\langle X^2, \frac{1}{2}\right\rangle + \left\|\frac{1}{2}\right\|_2^2 = \left\|X^2\right\|_2^2 - \left\langle X^2, 1\right\rangle + \frac{1}{4}\|1\|_2^2 = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

donc :

$$E_2 = 2\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left(X^2 - \tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,(2X^2 - 1).$$

En conclusion, la base orthonormale obtenue est :

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_1, \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_2\right\}.$$

18. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale et déterminer la norme de T_n pour $n \in \mathbb{N}$. On pourra utiliser le changement de variable $t = \cos(u)$.
Le changement de variable est licite comme vu à la question 16.
Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on calcule donc, en utilisant $(\star_n)$ et $(\star_m)$:

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m\rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)\,T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{T_n(\cos(u))\,T_m(\cos(u))}{|\sin(u)|}\sin(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi} T_n(\cos(u))\,T_m(\cos(u))\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi}\cos(nu)\cos(mu)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Mais $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$ donc

$$\langle T_n, T_m\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos((n+m)u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos((n-m)u)\,\mathrm{d}u.$$

Si l'on suppose $n \neq m$, alors $n - m \neq 0$ et $n + m \neq 0$ (car $n + m = 0 \Rightarrow n = m = 0$ puisqu'il s'agit d'entiers naturels).
Dans ce cas :

$$\langle T_n, T_m\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)u)}{n+m}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-m)u)}{n-m}\right]_0^{\pi} = 0.$$

Ceci prouve que la famille$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

Supposons maintenant $n = m \neq 0$. Alors :

$$\langle T_n, T_n\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(2nu)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2nu)}{2n}\right]_0^{\pi} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $\|T_n\|_2^2 = \frac{2}{\pi}$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|T_n\|_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

Enfin, le polynôme $\frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0$ est unitaire, d'après la question précédente, donc :

$$\boxed{\|T_0\|_2 = \sqrt{\pi}.}$$

Exercice 2 - Deux équations différentielles (Concours ATS 2023)

Soit $\alpha \geq 0$ un paramètre réel positif. On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$y'' + \alpha y = 0 \qquad (E_\alpha)$$

$$4ty''(t) + 6y'(t) + \alpha y(t) = 0 \qquad (F_\alpha)$$

Pour chacune de ces équations différentielles, l'inconnue y est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ à valeurs réelles.

1. (a) Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E_0).

   $(E_0) : y'' = 0$.
   $y'' = 0$ si et seulement si y' est constante c'est-à-dire si, et seulement si, y est une fonction affine. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions de la forme :

$$\boxed{y : t \mapsto At + B, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.}$$

(b) Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E_α) lorsque $\alpha > 0$.

Puisque $\alpha > 0$, l'équation différentielle (E_α) est de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = \sqrt{\alpha}$. Les solutions de (E_α) sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions de la forme :

$$\boxed{y : t \mapsto A\cos\left(\sqrt{\alpha}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\alpha}t\right), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.}$$

2. Soient u, v deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, et vérifiant
$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad u(t) = tv(t^2).$$

(a) Donner, en tout point $t > 0$, une expression de $u'(t)$ en fonction de t, $v(t^2)$ et $v'(t^2)$.

Remarque : La fonction $t \mapsto t^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$, à valeurs dans $]0; +\infty[$. La fonction v est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$. Donc, par composée, la fonction $t \mapsto tv(t^2)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$. Par produit avec la fonction $t \mapsto t$, également de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$, la fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$.
En utilisant les formules des dérivées d'un produit et d'une composée, on a pour tout $t > 0$:

$$u'(t) = 1 \times v(t^2) + t \times 2tv'(t^2) = \boxed{v(t^2) + 2t^2 v'(t^2)}$$

(b) Montrer que, pour tout réel $t > 0$, on a $u''(t) = 4t^3 v''(t^2) + 6tv'(t^2)$.

En dérivant l'expression de la question précédente, on a, pour tout $t > 0$:

$$u''(t) = 2tv'(t^2) + 4tv'(t^2) + 2t^2 \times 2tv''(t^2)$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall t \in]0; +\infty[, u''(t) = 4t^3 v''(t^2) + 6tv'(t^2)}$$

(c) En déduire que u est solution de (E_α) si et seulement si v est solution de (F_α)

u est solution de (E_α) si et seulement si :

$$\forall t \in]0; +\infty[, \quad u''(t) + \alpha u(t) = 0. \quad (\star)$$

En remplaçant par les expressions trouvées aux deux questions précédentes, on obtient :

$$(\star) \Leftrightarrow \forall t \in]0; +\infty[, \quad 4t^3 v''(t^2) + 6tv'(t^2) + \alpha tv(t^2) = 0.$$

Comme t ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$:

$$(\star) \Leftrightarrow \forall t \in]0; +\infty[, \quad 4t^2 v''(t^2) + 6v'(t^2) + \alpha v(t^2) = 0.$$

On effectue le changement de variable $x = \varphi(t) = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{x}$. La fonction $\varphi : \left| \begin{array}{ccc}]0; +\infty[& \to &]0; +\infty[\\ t & \mapsto & t^2 \end{array} \right.$ est bijective.
Ainsi, lorsque t décrit $]0; +\infty[$, x décrit $]0; +\infty[$.

$$(\star) \Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[, \quad 4xv''(x) + 6v'(x) + \alpha v(x) = 0.$$

Cette dernière équation est l'équation (F_α).
Ainsi, u est solution de (E_α) si et seulement si v est solution de (F_α).

3. (a) Déduire de la question précédente que les solutions de l'équation différentielle (F_0) sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{C_1}{\sqrt{t}} + C_2,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.

D'après la question précédente, u est solution de (E_0) si et seulement si v est solution de (F_0). Or, d'après la première question, les solutions de (E_0) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $u : t \mapsto C_1 + C_2 t$ où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.
Avec les notations des questions précédentes :

$$\begin{aligned} u(t) = tv(t^2) \Leftrightarrow v(t^2) &= \frac{u(t)}{t} \\ \Leftrightarrow v(x) &= \frac{u(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Finalement, les solutions de (F_0) sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$v(x) = \tfrac{u(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{C_1 + C_2\sqrt{x}}{\sqrt{x}},$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles, c'est-à-dire les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto \frac{C_1}{\sqrt{x}} + C_2}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.

(b) Donner de même la forme générale des solutions de (F_α) lorsque $\alpha > 0$.

On raisonne de même. Les solutions de (E_α) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme :

$$u : t \mapsto A\cos\left(\sqrt{\alpha}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\alpha}t\right),$$

avec A, B deux constantes réelles. De même que précédemment, les solutions de (F_α) sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$v(x) = \tfrac{u(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \tfrac{A\cos\left(\sqrt{\alpha}\sqrt{x}\right) + B\sin\left(\sqrt{\alpha}\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}},$$

où A et B sont deux constantes réelles, c'est-à-dire les fonctions de la forme

$$\boxed{x \mapsto \frac{A\cos\left(\sqrt{\alpha x}\right) + B\sin\left(\sqrt{\alpha x}\right)}{\sqrt{x}}}$$

où A et B sont deux constantes réelles.

Exercice 3 - Série de Fourier (Concours ATS 2023)

On considère la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(-\pi) = 0$ et

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad f(t) = tcos(t).$$

1. Étudier la parité de la fonction f.

Corrigé. Pour un réel t quelconque, on a $f(t) \neq t\cos(t)$ en général.
Puisque f est 2π-périodique, il suffit d'étudier la parité de sa restriction au segment $[-\pi, \pi]$.

Pour tout réel $t \in]-\pi,\pi[$, comme $-t \in]-\pi,\pi[$, on a $f(-t) = (-t)\cos(-t) = -t\cos(t)$ (par parité de cos) $= -f(t)$. De même, on a $f(-\pi) = 0$ et $f(\pi) = f(\pi - 2\pi)$ (car f est 2π-périodique) $= f(-\pi) = 0$, donc l'égalité $f(\pi) = -f(-\pi)$ est également vraie. Ainsi la restriction de f au segment $[-\pi,\pi]$ est **impaire**, ce qui implique que $\boldsymbol{f}$ **est impaire sur** $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

2. On note

$$Sf(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$$

la série de Fourier de la fonction f.

(a) Calculer les coefficients de Fourier a_n pour $n \geq 0$.

Corrigé. Puisque f est impaire, il est immédiat que

$$\boxed{a_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

(b) Calculer le coefficient de Fourier b_1. *On rappelle que* $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ *pour tout réel* t.

Corrigé. Ici la période est $T = 2\pi$ et la pulsation est $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. Le calcul de b_1 ci-dessous fait à un moment donné intervenir une intégration par parties.

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}2\int_0^{\pi} t\cos(t)\sin(t)\mathrm{d}t \quad (\text{car } t \mapsto t\cos(t)\sin(t) \text{ est paire})\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\left[t\left(-\frac{\cos(2t)}{2}\right)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(2t)\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\pi\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi}}_{0-0}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}.}
\end{aligned}$$

(c) Calculer les coefficients b_n pour tout entier $n \geq 2$. *On rappelle que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad \cos(x)\sin(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(y-x)}{2}.$$

Corrigé. De même, pour tout entier $n \geq 2$, en faisant encore une fois intervenir une intégration par parties,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2\pi}2\int_0^{\pi} t\cos(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\left(\sin(t+nt) + \sin(nt-t)\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[t\left(-\frac{\cos((n+1)t)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)t)}{n-1}\right)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\left(\frac{\cos((n+1)t)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)t)}{n-1}\right)\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\pi\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\right) + 0 + \underbrace{\left[\frac{\sin((n+1)t)}{(n+1)^2} + \frac{\sin((n-1)t)}{(n-1)^2}\right]_0^{\pi}}_{0+0-0-0}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n-1} = \boxed{(-1)^n\frac{2n}{(n+1)(n-1)}.}
\end{aligned}$$

3. (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) = \frac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}(f(t+h) + f(t-h))$.

Corrigé. Autrement dit, il faut montrer que f est égale à sa propre régularisée sur $\mathbb{R}$.
La fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (elle est discontinue en tout $t = (2k+1)\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, voir ci-dessous), on ne peut donc utiliser cet argument pour justifier que f est égale à sa régularisée.
Puisque f est 2π-périodique, il suffit de montrer l'égalité demandée pour tout $t \in [-\pi,\pi[$.

— Puisque $f(t) = t\cos(t)$ pour tout $t \in]-\pi, \pi[$, alors f est continue sur $]-\pi, \pi[$ en tant que produit de fonctions continues usuelles, par conséquent $f(t)$ est bien égal à la régularisée de f en t pour tout $t \in]-\pi, \pi[$.

— Ensuite, puisque f est 2π-périodique, et par continuité de la fonction $t \mapsto t\cos(t)$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}(f(-\pi+h) + \underbrace{f(-\pi-h)}_{f(-\pi-h+2\pi)}) &= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+}(f(-\pi+h) + f(\pi-h)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to-\pi^+} f(t) + \lim_{t\to\pi^-} f(t)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to-\pi^+} t\cos(t) + \lim_{t\to\pi^-} t\cos(t)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\pi(-1) + \pi(-1)\right) = 0 = f(-\pi).\end{aligned}$$

On a montré que f est égale à sa régularisée sur $[-\pi, \pi[$, donc elle est égale à sa régularisée sur $\mathbb{R}$ tout entier par 2π-périodicité, ce qu'il fallait montrer.
Remarque : la fonction f n'est pas continue en $-\pi$ (ni donc en n'importe quel $t = (2k+1)\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$) car elle y admet des limites à gauche et à droite différentes (π et $-\pi$), mais elle coïncide malgré tout en ce point avec sa régularisée.

(b) Montrer que la série de Fourier Sf converge vers f. Énoncer le théorème utilisé.

Corrigé. Il s'agit d'appliquer **le théorème de Dirichlet**. Pour cela, il faut justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire (puisque f est 2π-périodique), que la restriction de f à un segment de longueur 2π est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Puisqu'on connaît la formule explicite $f(t) = t\cos(t)$ pour tout $t \in]-\pi, \pi[$, le choix le plus naturel est le segment $[-\pi, \pi]$.
Sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que produit de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$ (le polynôme $t \mapsto t$ et cos), de dérivée $f' : t \mapsto \cos(t) - t\sin(t)$.
De plus, on a déjà montré que f admet pour limites respectives en $-\pi^+$ et π^- les nombres π et $-\pi$, et l'expression de $f'(t)$ obtenue plus haut montre que $\lim\limits_{t\to-\pi^+} f'(t) = \cos(-\pi) + \pi\sin(-\pi) = -1$ et $\lim\limits_{t\to\pi^-} f'(t) = \cos(\pi) - \pi\sin(\pi) = -1$, ainsi f et f' admettent des limites **finies** en $-\pi^+$ et π^-, ce qui finit de montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi]$, donc sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.
Conclusion : **par le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge vers sa régularisée, c'est-à-dire la fonction f d'après la question précédente.**

4. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$b_n^2 = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}.$$

Corrigé. Par la question 2(c), on sait que $b_n^2 = \frac{4n^2}{(n+1)^2(n-1)^2}$, il suffit donc de montrer que l'expression donnée par l'énoncé est bien égale à celle-ci, en mettant au même dénominateur et en simplifiant :

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2, \quad & \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{(n-1)^2 + (n+1)^2 + (n+1)^2(n-1) - (n-1)^2(n+1)}{(n+1)^2(n-1)^2} \\ &= \frac{n^2 - 2n + 1 + n^2 + 2n + 1 + n^3 + 2n^2 + n - n^2 - 2n - 1 - n^3 + 2n^2 - n - n^2 + 2n - 1}{(n+1)^2(n-1)^2} \\ &= \frac{4n^2}{(n+1)^2(n-1)^2} = b_n^2.\end{aligned}$$

(b) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$ est convergente de somme

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{2}.$$

Corrigé. Pour tout entier $n\geq 2$, notons S_n la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$. On explicite S_n par changements d'indices et télescopage :

$$S_n=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\right)-\left(\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1+\frac{1}{2}-0-0=\frac{3}{2},$$

donc cette série converge effectivement vers $\frac{3}{2}$.
$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\neq\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}\right)-\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\right)$, les deux sommes de droite n'existant pas (les séries $\sum\frac{1}{n-1}$ et $\sum\frac{1}{n+1}$ sont divergentes par le critère de Riemann).

(c) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}b_n^2=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}$.

Corrigé. Par la question 4(a), la question précédente, et changements d'indices,

$$\sum_{n=2}^{+\infty}b_n^2=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}=\underbrace{\sum_{i=3}^{+\infty}\frac{1}{i^2}}_{\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}\right)-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}}+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}+\underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}}_{\frac{3}{2}}$$

$$=2\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}\right)-1-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=2\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}\right)+\frac{1}{4},$$

ce qu'il fallait montrer.

5. (a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi f(t)^2\mathrm{d}t$. *On rappelle que* $\cos(t)^2=\dfrac{1+\cos(2t)}{2}$ *pour tout réel* t.

Corrigé.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f^2&=\int_0^\pi t^2\cos^2(t)\mathrm{d}t=\int_0^\pi t^2\frac{1+\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t=\int_0^\pi\frac{t^2}{2}\mathrm{d}t+\int_0^\pi t^2\frac{\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t\\&=\left[\frac{t^3}{6}\right]_0^\pi+\left[t^2\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^\pi-\frac{1}{4}\int_0^\pi 2t\sin(2t)\mathrm{d}t\quad\text{(par intégration par parties)}\\&=\frac{\pi^3}{6}-0+0-0-\frac{1}{2}\left(\left[t\left(-\frac{\cos(2t)}{2}\right)\right]_0^\pi+\frac{1}{2}\int_0^\pi\cos(2t)\mathrm{d}t\right)\quad\text{(par i.p.p.)}\\&=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{2}\left(\pi\left(-\frac{1}{2}\right)+0+\frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^\pi}_{0-0}\right)\\&=\boxed{\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}.}\end{aligned}$$

(b) En appliquant le théorème de Parseval à la fonction f, trouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Corrigé. On peut appliquer le théorème de Parseval car la fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (on a montré en question 3(b) que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc elle y est en particulier continue par morceaux).

La formule de Parseval est $a_0^2+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2$, qui s'explicite ici comme suit en utilisant le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}
0^2+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} 0^2+b_n^2\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}2\int_0^{\pi} t^2\cos^2(t)\mathrm{d}t \quad \text{(la fonction intégrée est paire)}\\
&= \frac{1}{2\pi}2\left(\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = 2\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Or, on sait que $b_1=-\frac{1}{2}$ et que $\sum_{n=2}^{+\infty} b_n^2 = 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{4}$ d'après la question 4(c), donc en décomposant la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ en $b_1^2+\sum_{n=2}^{+\infty} b_n^2$, l'égalité (1) se réécrit :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{4}=\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} &= \frac{\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{2}\\
&= \boxed{\frac{\pi^2}{6}.}
\end{aligned}$$

6. Écrire une fonction **calculSomme**, en *Python*, qui prend en entrée un entier naturel n non nul, et renvoie la valeur $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

Corrigé.

```
def calculSomme(n):
    somme = 0
    for k in range(1,n+1):
        somme = somme + 1/k**2
    return somme
```

7. On admet que

$$\forall n\geq 1,\quad \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{\pi^2}{6}\right|\leq\frac{1}{n}.$$

Écrire une fonction **approx**, en *Python*, qui prend en entrée un réel **eps** strictement positif, et renvoie une approximation de $\frac{\pi^2}{6}$ à **eps** près.

Corrigé. Par l'inégalité donnée par l'énoncé, pour un réel $\epsilon>0$ donné, une approximation de $\frac{\pi^2}{6}$ à ϵ près est $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ pour n'importe quel entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n}\leq\epsilon$. Il suffit donc de considérer les entiers $n\geq 1$ les uns après les autres jusqu'à ce que $\frac{1}{n}\leq\epsilon$, puis de renvoyer la valeur de la somme partielle $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ à l'aide de la fonction de la question précédente :

```
def approx(eps):
    n = 1
    while 1/n > eps: #tant que l'entier n est trop petit
        n = n + 1
    #n est maintenant le plus petit entier tel que 1/n <= eps
    return calculSomme(n)
```

Autre programme possible : un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leq \epsilon$, c'est-à-dire tel que $n \geq \frac{1}{\epsilon}$, est par exemple $n = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$, la partie entière étant implantée en Python par la fonction `math.floor` par exemple :

```
import math
def approx(eps):
    n = math.floor(1/eps)+1
    return calculSomme(n)
```