Exercices
Chap.13 : Séries de Fourier

1 Application aux calculs de sommes

Exercice 1.1. *Soit f la fonction 1-périodique définie par $f(x) = x^2$ sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$.*

1. *Dessiner le graphe de la fonction f.*
2. *Montrer que f est égale à sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.*
3. *Déterminer la série de Fourier de f.*
4. *En déduire la convergence et la valeur des sommes suivantes :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Exercice 1.2.
1. *Dessiner le graphe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \max(\sin x; 0)$.*
2. *Déterminer la série de Fourier de f et justifier qu'elle converge vers f en tout point $x \in \mathbb{R}$.*
3. *Justifier la convergence et calculer $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1}$.*

Exercice 1.3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par :*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi - t}{2} & si\ t \in]0; 2\pi[\\ 0 & si\ t = 0 \end{cases}$$

1. *Dessiner le graphe de la fonction f.*
2. *Justifier que f est une fonction impaire.*
3. *Justifier que f est égale à série de Fourier sur $\mathbb{R}$.*
4. *Déterminer la série de Fourier de f.*
5. *En déduire la convergence et la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$*

Exercice 1.4. *Soit φ la fonction 2π-périodique, définie par $\varphi(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ pour $x \in [-\pi; \pi]$.*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

(a) *Calculer* $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}n)t}\ \mathrm{d}t$.
(b) *En déduire la valeur de* $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{t}\cos(nt)\mathrm{d}t$.
(c) *Calculer ensuite* $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t}\cos(nt)\mathrm{d}t$.

2. *Déterminer la série de Fourier de* φ.
3. *En déduire la convergence et la valeur des sommes* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ *et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$.

2 Plus difficile ou théorique...

Exercice 2.1. *Soit f la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par* $f(t) = \frac{1}{1+\cos^2(t)}$.

1. *Montrer que f est π-périodique.*
2. *Montrer que* $\forall n \geqslant 2, a_{n+1}(f) + 6a_n(f) + a_{n-1}(f) = 0$.
3. *En déduire la valeurs des coefficients de Fourier de f. On pourra utiliser le changement de variable $u = \tan(t)$ dans le calcul de $a_0(f)$.*
4. *Établir la convergence et la valeur de la somme de la série de Fourier de f en tout réel t.*
5. *Calculer* $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1+\cos^2(t))^2}$.

Exercice 2.2. *Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et 2π-périodique.*

1. *Montrer que si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls, alors f est la fonction nulle.*
2. *En déduire que si f et g sont deux fonctions continues ayant les mêmes coefficients de Fourier, alors $f = g$.*

Exercice 2.3. *Soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. On désigne par a'_n et b'_n les coefficients de Fourier de la fonction f'.*

1. *Calculer a'_0.*
2. *Exprimer les autres coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f.*
3. *A l'aide de l'égalité de Parseval, démontrer l'inégalité suivante :*
$$\int_0^{2\pi}(f(t))^2dt \leqslant \int_0^{2\pi} (f'(t))^2\,dt$$
4. *Quelles sont les fonctions pour lesquelles l'inégalité précédente est une égalité ?*

Exercice 2.4. *Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction T-périodique de classe $\mathscr{C}^k$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$).*
On appelle ***coefficients de Fourier exponentiels*** *de f la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par :*
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\ \mathrm{d}t$$
où $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

1. *Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de $f^{(p)}$ en fonction de ceux de f (pour tout $p \in [\![1, k]\!]$).*
   Indication : *On pourra intégrer par parties.*
2. *Montrer que les coefficients de Fourier exponentiels de f vérifient $c_n(f) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.*
3. *En déduire que les coefficients de Fourier trigonométriques de f vérifient $a_n(f) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ et $b_n(f) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.*

On peut, en fait, montrer que $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ lorsque $n \to +\infty$ mais c'est plus difficile..

Exercice 2.5. ***Injectivité des coefficients de Fourier***
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et T-périodiques. Montrer que si les coefficients de Fourier de f et de g sont égaux, alors $f = g$.