Interrogation 4 - CORRECTION

Exercice 0.1. *1. Montrer que la fonction* $f : \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \frac{4x+1}{2x-1}$$

réalise une bijection de $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ *sur un intervalle* J *à préciser.*

f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

$$f'(x) = \frac{4(2x-1)-2(4x+1)}{(2x-1)^2} = \frac{-6}{(2x-1)^2} < 0$$

Par ailleurs :

- $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}} 4x+1 = 3$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}} 2x-1 = 0^+$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x+1}{2x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x}{2x} = 2$

D'où le tableau de variation :

x	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
f	‖ $+\infty$	$\searrow$ 2

Conclusion : on sait que :

(a) f est continue sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

(b) f est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et à valeurs dans $]2;+\infty[$

Donc, d'après le théorème de bijection, f réalise bien une bijection de $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ sur $J =]2;+\infty[$.

2. Expliciter f^{-1} sur l'intervalle J. Soit $y \in]2;+\infty[$, on cherche $x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ tel que $y = f(x)$.

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{4x+1}{2x-1} \Leftrightarrow y(2x-1) = 4x+1$
$\Leftrightarrow 2xy - y - 4x = 1 \Leftrightarrow x(2y-4) = 1+y$
$\Leftrightarrow x = \frac{1+y}{2y-4}$ *car* $y \in]2;+\infty[$ *(donc* $2y-4 \neq 0$*)*

Ainsi $f^{-1}: \begin{array}{l}]2;+\infty[\to \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\\ x \mapsto \frac{1+x}{2x-4} \end{array}$

Exercice 0.2. *1. Calculer la limite du taux d'accroissement en* $x_0 = 1$ *de la fonction* f *définie sur* $I =]-2;+\infty[$ *par :*

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2+x}$$

On sait que $f(1) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. *Donc :*

$\tau_1(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{2x+\frac{1}{2+x}-\frac{7}{3}}{x-1} = \frac{2x\times3\times(2+x)+3-7(2+x)}{3(2+x)(x-1)}$
$= \frac{12x+6x^2+3-14-7x}{3(2+x)(x-1)} = \frac{6x^2+5x-11}{3(2+x)(x-1)}$

Le discriminant du numérateur est $\Delta = 5^2-4\times6\times(-11) = 25+264 = 289 = 17^2$. *Donc deux racines :*

$$x_1 = \frac{-5-17}{12} = \frac{-11}{6} \text{ et } x_2 = \frac{-5+17}{12} = 1$$

donc $6x^2+5x-11 = 6(x-\frac{11}{6})(x-1) = (6x-11)(x-1)$.
Donc $\tau_1(x) = \frac{(6x+11)(x-1)}{3(2+x)(x-1)} = \frac{(6x+11)}{3(2+x)}$. *Il vient* $\lim\limits_{x\to1}\tau_1(x) = \frac{17}{9}$

2. En déduire l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ *au point d'abscisse 1.*
$T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{17}{9}(x-1) + \frac{7}{3}$
$T_1 : y = \frac{17}{9}x + \frac{4}{9}$