Devoir Surveillé 5 - CORRECTION

Durée : 3 heures
Calculatrice interdite

Exercice 0.1. *Soit f l'application :*

$$f :\left|\begin{array}{ll}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto (-2x+y, x-2y)\end{array}\right.$$

et on notera I l'application identité de $\mathbb{R}^2$.

1. *Démontrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.*
   On doit montrer que, pour tout $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ éléments de $\mathbb{R}^2$, et λ réel, on a : $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$ Soient alors $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ éléments de $\mathbb{R}^2$, et λ réel. On a $\lambda u + v = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \end{pmatrix}$, et par suite :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= \begin{pmatrix} -2(\lambda x + x') + \lambda y + y' \\ \lambda x + x' - 2(\lambda y + y') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(-2x+y) + (-2x'+y') \\ \lambda(x-2y) + (x'-2y') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(-2x+y) \\ \lambda(x-2y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x'+y' \\ x'-2y' \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} -2x+y \\ x-2y \end{pmatrix} + f(v) \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

   Donc f est linéaire.

2. *Donner l'expression de $f^2(x,y)$ en fonction de x et y pour un couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

Soit alors $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. *Alors :*

$$\begin{aligned} f^2(u) &= f\begin{pmatrix} -2x+y \\ x-2y \end{pmatrix} \quad \text{et en posant } \left\{ \begin{array}{l} x' = -2x+y \\ y' = x-2y \end{array} \right. \\ &= \begin{pmatrix} -2x'+y' \\ x-2y' \end{pmatrix} \text{ d'où en remplaçant } x' \text{ et } y' \text{ en fonction de } x \text{ et } y \\ &= \begin{pmatrix} -2(-2x+y)+x-2y \\ -2x+y-2(x-2y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5x-4y \\ -4x+5y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. *Montrer que* $g = f^2 + 4f + 3I$ *est l'endomorphisme nul.*
   On doit montrer que :

$$\forall u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, f^2(u) + 4f(u) + 3u = \overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^2}.$$

   Soit alors $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. *D'après la relation précédente, on en déduit que :*

$$f^2(u)+4f(u)+3u = \begin{pmatrix} 5x-4y+4(-2x+y)+3x) \\ -4x+5y+4(x-2y)+3y \end{pmatrix} \text{ qui donne } g(u) = \overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^2}$$

   On en déduit que g *est l'endomorphisme nul.*

4. *En déduire l'existence d'un endomorphisme* h *tel que* $f \circ h = h \circ f = I$. *Qu'en conclure pour* f *?*
   Il suffit de remarquer que $f^2 = f \circ f$ *et que* $f = f \circ I = I \circ f$ *pour pouvoir écrire :*

$$\begin{aligned} f^2 + 4f + 3I = 0 &\Leftrightarrow f \circ f + 4f \circ I = -3I \\ &\Leftrightarrow f \circ (f + 4I) = -3I \\ &\Leftrightarrow f \circ \left(-\frac{1}{3}f - \frac{4}{3}I\right) = I \end{aligned}$$

$$f^2 + 4f + 3I = 0 \Leftrightarrow \quad f \circ f + 4I \circ f = -3I$$
$$\Leftrightarrow (f + 4I) \circ f = -3I \Leftrightarrow \left(-\tfrac{1}{3}f - \tfrac{4}{3}I\right) \circ f = I$$

   d'où le résultat en posant $h = -\frac{1}{3}f - \frac{4}{3}I$.
   On en déduit que f *est bijective, et par suite qu'il s'agit d'un automorphisme de* $\mathbb{R}^2$.

5. *Justifier que g peut s'écrire $g = (f+I)\circ(f+3I)$ et que $g = (f+3I)\circ(f+I)$.*
   On a :
   $$(f+I)\circ(f+3I) = f^2 + 3f\circ I + I\circ f + 3I\circ I$$
   et puisque $f\circ I = I\circ f$ et $I\circ I = I$, on en déduit que :
   $$(f+I)\circ(f+3I) = f^2 + 4f + I = g$$
   d'où le résultat. De même pour l'autre composée.
6. *Donner l'expression des endomorphismes $f_1 = f+I$ et $f_2 = f+3I$ en fonction de x et y pour un couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.*
   Soit $u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$. On a
   $$\begin{aligned} f_1(u) &= f(u)+I(u) \\ &= \begin{pmatrix} -2x+y \\ x-2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_2(u) &= f(u)+3I(u) \\ &= \begin{pmatrix} -2x+y \\ x-2y \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} \end{aligned}$$
7. *Déterminer le noyau de f_1 et f_2.*
   Par définition :
   $$Ker(f_1) = \left\{u\in\mathbb{R}^2 / f_1(u) = 0\right\} \text{ et } Ker(f_2) = \left\{u\in\mathbb{R}^2 / f_2(u) = 0\right\}.$$
   En notant $u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, ces deux recherches de noyaux reviennent donc à résoudre les deux systèmes
   $$\mathscr{S}_1 : \begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \text{et } \mathscr{S}_2 : \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$
   qui donnent donc :
   $$u\in\operatorname{Ker} f_1 \quad\Leftrightarrow\quad x-y=0 \text{ et } u\in\operatorname{Ker} f_2 \quad\Leftrightarrow\quad x+y=0$$
   On en déduit donc que Ker $f_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
8. *On désigne par $F = Ker\,(f+I)$ et $G = Ker\,(f+3I)$*
   (a) *Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.*
   F et G sont deux sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ car noyaux d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Il s'agit donc de montrer que $F\cap G = \{0\}$ et que

$\mathbb{R}^2 = F + G$ c'est à dire que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ s'obtient comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Soit alors $u \in F \cap G$. Alors $f_1(u) = 0$ c'est à dire $f(u) = -u$, et puisque $u \in G, f_2(u) = 0$ soit $f(u) = -3u$ et par suite $u = 0$, d'où l'inclusion recherchée. Ainsi $F \cap G = \{(0,0)\}$.

Soit alors $u \in \mathbb{R}^2$. Puisque $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, il s'agit d'écrire u comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs, c'est à dire, en notant $u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on cherche deux réels a et b tels que :

$$u = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On résout le système $\left\{\begin{array}{l} a + b = x \\ a - b = y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{x+y}{\frac{x-y}{2}} \\ b = \frac{x-2}{2} \end{array}\right.$ et par suite, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{x+y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{x-y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'où la décomposition de u sur $F + G$.
***Remarque :** on pouvait aussi prouver que la somme était directe puis utiliser la formule de Grassmann pour démontrer l'égalité des ensembles grâce à leurs dimensions.*

(b) *Déterminer la projection p sur F parallèlement à G. On demande de calculer explicitement $p(x, y)$.*
On a immédiatement $p : \left|\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \end{array}\right.$

(c) *En déduire l'expression de $q(x, y)$ où q est la projection sur G parallèlement à F.*
On sait que $q = I - p$ et on en déduit alors que $q : \left|\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{x-y}{2}, \frac{-x+y}{2}\right) \end{array}\right.$

(d) *Vérifier que $p + q = I$ et $p + 3q = -f$.*
En considérant un vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathbb{R}^2$, on a

$$(p + 3q)(u) = p(u) + 3q(u) = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} + 3\frac{x-y}{2} \\ \frac{x+y}{2} - 3\frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y \end{pmatrix} = -f(u).$$

(e) *Retrouver le résultat de la question (4.).*
En remarquant que $p \circ q = q \circ p = 0$*, on a*

$$\left(p + \frac{1}{3}q\right) \circ (p + 3q) = p^2 + q^2 = p + q = I = (p + 3q) \circ \left(p + \frac{1}{3}q\right)$$

Donc :

$$-\left(p + \frac{1}{3}q\right) \circ f = f \circ (-\left(p + \frac{1}{3}q\right)) = I$$

On en déduit que f *est bijective d'inverse* $-(p + \frac{1}{3}q)$.

Exercice 0.2. *Dans tout ce problème, on désignera par* f *la fonction :*

$$f : \left\{ \begin{array}{l}]-1;0[\cup]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{ln(1+x)}{x} \end{array} \right.$$

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On désigne par k *la fonction* $k : \left\{ \begin{array}{l}]-1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - (1+x)ln(1+x) \end{array} \right.$.

1. *Calculer* $k'(x)$ *pour tout* $x \in]-1;+\infty[$.
   k *est dérivable sur* $]-1;+\infty[$ *comme composée de fonctions dérivables sur* $]-1;+\infty[$*. Après calcul, on obtient* $k'(x) = -ln(1+x)$
2. *Étudier le signe de* $k'(x)$ *pour tout* $x \in]-1;+\infty[$*, puis construire le tableau de variation de* k *sur* $]-1;+\infty[$.

x	-1		0		$+\infty$
$k'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
k	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	

3. *En déduire le signe de* $k(x)$ *sur* $]-1;+\infty[$*. Justifier votre réponse.*
   D'après le tableau de variation, k *admet* 0 *pour maximum, il est atteint en* 0*. Par conséquent* $k(x) \leq 0$ *sur* $]-1;+\infty[$.

Partie B - Étude de la fonction f

1. *Déterminer* $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   On sait que $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} ln(1+x) = -\infty$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$.
   $f(x) = \frac{ln(x(1+\frac{1}{x})}{x} = \frac{ln(x)}{x} + \frac{ln(1+\frac{1}{x})}{x}$.
   Par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(1+\frac{1}{x})}{x} = 0$ *et par croissances comparées* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$*. Donc* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. *Étude de f au voisinage de 0.*
   (a) *Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.*
   On sait que $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.
   (b) *Justifier alors que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\tilde{f}$ et on précisera la valeur de $\tilde{f}(0)$. On notera $\mathscr{D}_{\tilde{f}}$ le domaine de définition de $\tilde{f}$.*
   D'après la question précédente, f est prolongeable par continuité en 0. Par ailleurs, f est continue sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ comme composée de fonctions continues. Donc f est prolongeable sur $[0;+\infty[$ en une fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathscr{D}_{\tilde{f}} = [0;+\infty[$:
   $$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{ln(1+x)}{x} \; si \; x \neq 0 \\ 1 \; si \; x = 0 \end{cases}$$
   (c) *La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $\tilde{f}'(0)$.*
   f admettant $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$ comme $DL_1(0)$, $\tilde{f}$ est dérivable en 0 avec $\tilde{f}'(0) = \frac{-1}{2}$ et $\tilde{f}'$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.
3. *Variations de $\tilde{f}$ sur $\mathscr{D}_{\tilde{f}}$.*
   (a) *Démontrer que pour tout $x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{k(x)}{x^2(1+x)}$.*
   $$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}\times x - ln(1+x)\times 1}{x^2} = \frac{k(x)}{x^2(1+x)}$$
   (b) *Construire le tableau de variation de $\tilde{f}$ sur $\mathscr{D}_{\tilde{f}}$.*
   Le signe de $k(x)$ a été déterminé en question A.3. Par ailleurs, $x^2(1+x) \geq 0$ sur $\mathscr{D}_f$. Donc, $\tilde{f}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$, $\tilde{f}'$ est du même signe que $k(x)$ sur $]-1;+\infty[$. Ainsi $\tilde{f}$ est strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$.