Pour le 6 octobre 2023
Devoir-Maison 3

Exercice 0.1. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa nature ?*
2. *Montrer que F est stable par f (c'est à dire que $f(F) \subset F$).*
3. *Après avoir justifié que $B = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de f dans la base B.*
   Que peut-on dire de la forme de cette matrice ?

Indication : *Pour montrer que F est stable par f, on pourra au choix :*

- *Montrer que pour tout $x \in F, f(x) \in F$*
- *Si $B = (u_1, \ldots, u_p)$ est une base (ou plus généralement une partie génératrice) de F, montrer que :*

$$\forall i \in \{1, ...p\}\, f(u_i) \in F$$

Exercice 0.2. *On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère :*

$$F = \mathrm{Vect}(1, 1) \text{ et } G = \mathrm{Vect}(1, 2).$$

1. *Justifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.*
2. *Déterminer l'expression de la projection p sur F parallèlement à G.*