

Chap.41 : Représentation matricielle d'une application linéaire

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désignera \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Un élément de \mathbb{K} est appelé un scalaire.

E et F désigneront deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie avec :

$$\dim(E) = p \in \mathbb{N} \text{ et } \dim(F) = n \in \mathbb{N}.$$

1 Matrice associée à une application linéaire.

Définition 1.1. Soient $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\}$ une base de E et $\mathcal{B}' = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ une base de F .

Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est entièrement déterminée par l'image des vecteurs de \mathcal{B} .

Soient des coefficients $a_{i,j}$ tels que pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a :

$$f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \vec{f}_i$$

On appelle **matrice de l'application linéaire f relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}'** , la matrice :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p-1} & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Dans cette matrice, $a_{i,j}$ désigne la $i^{\text{ième}}$ coordonnée du vecteur $f(\vec{e}_j)$ dans la base $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$.

Proposition 1.2. Avec les notations de la définition 1.1 :

- si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur \vec{x} dans \mathcal{B} ;
- si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des coordonnées de $f(\vec{x})$ dans \mathcal{B}' ;

alors :

$$Y = AX$$

Méthode 1.3. Pour écrire la matrice de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ dans les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F :

1. on détermine les images par f de chaque vecteur de la base \mathcal{B}_E ;
2. on exprime ces images dans la base \mathcal{B}_F ;
3. on écrit en colonnes les coordonnées obtenues.

Application 1.4. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + z, 3x - 4y) \end{cases}$.

On admet que f est linéaire. Écrire la matrice de f relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^3 et de \mathbb{R}^2 .

Application 1.5. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$.

On admet que f est linéaire. Écrire la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}_2[X]$.

Application 1.6. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 . On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'expression analytique de f .
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f + \lambda g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) + \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g)$$

Proposition 1.11. Matrice d'une composée

Soient E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et \mathcal{B}'' .

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$$

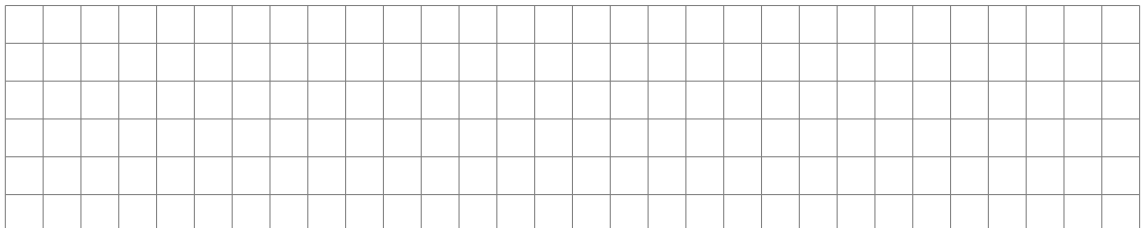
2 Rang d'une matrice

Définition 2.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **application linéaire canoniquement associée** à A , l'application linéaire $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ dont la matrice relativement aux bases canoniques de \mathbb{K}^p et de \mathbb{K}^n est A .

On appelle **rang de la matrice** A le rang de cette application linéaire associée. On note :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

Application 2.2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A .



Théorème 2.3. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n . Le rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est égal au rang de sa matrice dans n'importe quelles bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de E et F :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f))$$

Cela signifie en particulier que le rang de f ne dépend pas des bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' choisies.

3.2 Effets d'un changement de base

Proposition 3.4. Sur les coordonnées d'un vecteur.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $\vec{x} \in E$. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E .

On note :

- (x_1, \dots, x_n) les coordonnées de \vec{x} dans la base \mathcal{B}
- (x'_1, \dots, x'_n) les coordonnées de \vec{x} dans la base \mathcal{B}'

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes respectives des coordonnées de \vec{x} dans ces deux bases.

Alors :

$$X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'$$

En d'autres termes, $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ permet d'aller de la nouvelle base (\mathcal{B}') à l'ancienne base (\mathcal{B}).

Application 3.5. Soient $\vec{u}_1 = (1, 2, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 2, 1)$ et $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$ exprimés dans la base canonique \mathcal{C} de \mathbb{R}^3 .

1. Démontrer que $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 , puis écrire $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$.
2. Exprimer les coordonnées de $\vec{u} = (1, 4, 7)$ (donné dans \mathcal{C}) dans la base \mathcal{B} .

Proposition 3.6. Sur la matrice d'une application linéaire.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E , $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F .

$$Mat_{\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}'_E}(f) = (P_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F})^{-1} \times Mat_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f) \times P_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}$$

Preuve :

Proposition 3.7. Soient $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme de E , \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . Alors :

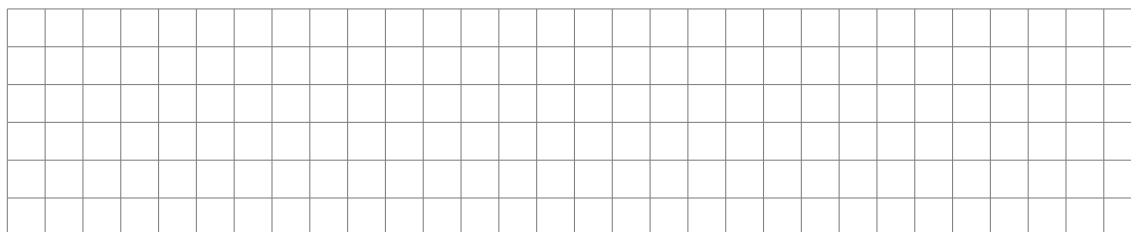
$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Définition 3.8. Deux matrices A et B sont dites **semblables** lorsqu'il existe une matrice inversible P telle que :

$$B = P^{-1}AP$$

Application 3.9. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P = aX^2 + bX + c \mapsto (3c - b + a) + (2c + a)X + aX^2 \end{cases}$
On admet que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et on note \mathcal{B} la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

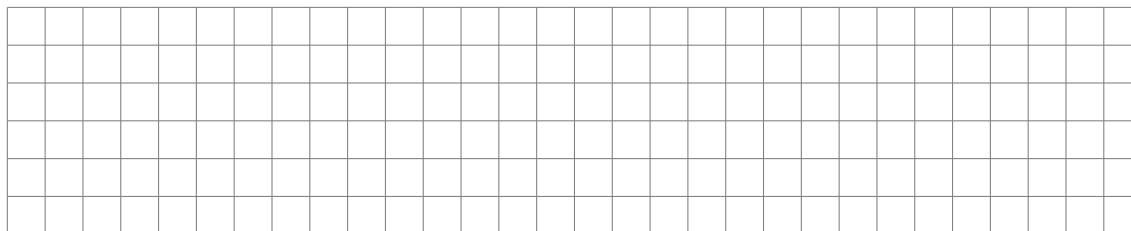
1. Écrire la matrice A de f dans \mathcal{B} .
2. Soient $P_0 = 1 + X + X^2$, $P_1 = X + X^2$ et $P_2 = 1 + X$.
 - (a) Démontrer que $\mathcal{B}' = \{P_0, P_1, P_2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - (b) Écrire la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .
3. On admet que $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Déterminer la matrice A' de f dans \mathcal{B}' .
4. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?



Application 3.10. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique \mathcal{C} de \mathbb{R}^2 .

On donne $\vec{u}_1 = (-2, 3)$ et $\vec{u}_2 = (-2, 5)$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ est une base de \mathbb{R}^2 .
2. Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B} .
3. Démontrer que f est un automorphisme de \mathbb{R}^2 .
4. En déduire le calcul de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.



4 Matrices d'endomorphismes particuliers

Proposition 4.1. Homothétie. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dans toute base de E , la matrice de l'homothétie vectorielle h_λ est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$$

Proposition 4.2. Projecteurs. Soit $E = F \oplus G$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n tel que $\dim(F) = r$ et $\dim(G) = n - r$.

On sait que si \mathcal{B}_F et \mathcal{B}_G sont des bases de F et de G alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ est une base de E .

Dans la base \mathcal{B} , la matrice du projecteur p sur F parallèlement à G est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

Proposition 4.3. Symétries. Soit $E = F \oplus G$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n tel que $\dim(F) = r$ et $\dim(G) = n - r$.

On sait que si \mathcal{B}_F et \mathcal{B}_G sont des bases de F et de G alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ est une base de E .

Dans la base \mathcal{B} , la matrice de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$