Devoir Surveillé 1 - CORRECTION

Durée : 2 heures
Calculatrice interdite

Exercice 0.1. *On considère la matrices suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer A^2, A^3.*
2. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Après calcul : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$
2. On procède par récurrence.
   Soit la propriété $P(n)$: "$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$"
   $P(1)$ est vraie par définition de la matrice A.
   Supposons $P(n)$ vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons que $P(n+1)$ est aussi vraie.
   $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1}+2^{n-1} & -2^{n-1}-2^{n-1} \\ -2^{n-1}-2^{n-1} & 2^{n-1}+2^{n-1} \end{pmatrix}$

Or $2^{n-1}+2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^{1+n-1} = 2^n$. Donc : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & -2^n \\ -2^n & 2^n \end{pmatrix}$.
Ainsi $P(n+1)$ est vraie.
Nous savons que $P(1)$ est vraie et que $P^(n)$ est héréditaire donc, par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 0.2. 1. *Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.*
Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

2. *Dire si la matrice est inversibles et, le cas échéant, calculer son inverse :*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Le calcul ne pose pas de problèmes. Il conduit à :
$$\frac{A^2+A}{2} = I_3 \Longrightarrow A\frac{A+I_3}{2} = \frac{A+I_3}{2}A = I_3.$$
A est inversible, et son inverse est :
$$\frac{1}{2}(A+I_3)$$
2. On utilise la méthode du pivot de Gauss. Après échelonnement sur la matrice augmentée, on obtient une équivalence en ligne avec la matrice :
$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
Le rang de cette matrice est 3. La matrice est donc inversible et on poursuit avec sa réduction. On obtient :
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Exercice 0.3. *On considère les matrices :*
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Démontrer que P est inversible, et que son inverse est $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.*
2. *On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D.*
3. *Calculer D^n pour tout $n \geq 1$.*
4. *Démontrer que, pour tout $n \geq 1, A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire les coefficients de A^n pour tout entier n.*

1. Il suffit de vérifier si $PQ = QP = I_3$, ce qui est bien le cas ici.
2. Après calcul, on obtient : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$
3. 3. Par récurrence, ou parce que l'on connait la formule donnait la puissance n-ième d'une matrice diagonale, on trouve :
$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-1)^n}{2^n} \end{pmatrix}$$

4. On remarque que $D = P^{-1}AP \Longleftrightarrow PDP^{-1} = A$ en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}.
   Il vient ensuite par récurrence sur n que $A^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 0.4. *Soit le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3\left[X\right]$.*
On considère les polynômes :

$$P_1 = 2X + X^3, P_2 = X + X^2 + 2X^3 \ \textit{et}\ P_3 = 1 + X^2.$$

Soit la famille $\mathscr{F} = \{P_1, P_2, P_3\}$.

1. *$\mathscr{F}$ est-elle libre ?*
2. *$\mathscr{F}$ est-elle une base de E ?*
3. *Est-il possible de la compléter en une base de E ?*

1. Remarquons tout d'abord que cette famille n'est pas échelonnée en degrés.
   Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = \overrightarrow{O}_{\mathbb{R}_3[X]}$. Alors :

   $$\begin{aligned} &\lambda_1(2X + X^3) + \lambda_2(X + X^2 + 2X^3) + \lambda_3(1 + X^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2)X^3 + (\lambda_2 + \lambda_3)X^2 + (2\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

   La famille $\mathscr{F}$ est donc libre.
2. Si $\mathscr{F}$ était une base de E alors on aurait $dim(E) = card(\mathscr{F}) = 3$. Or $dim(E) = dim(\mathbb{R}_3\left[X\right]) = 4$. Donc $\mathscr{F}$ n'est pas une base de E.
3. Est-il possible de la compléter en une base de E ?
   D'après le théorème de la base incomplète, toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.
   Soit le polynôme $P_4 = -1$. On montre facilement que la famille $\mathscr{F}' = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est libre.
   Or $dim(E) = 4 = card(\mathscr{F}')$ donc $\mathscr{F}'$ est une base de E.

Exercice 0.5. *Soient les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$:*

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\right\} \ \textit{et}\ G = Vect((1, 2, 1))$$

Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si :

1. F et G sont en somme directe

2. $F \bigoplus G = E$

1. Il s'agit de prouver que $F \bigcap G = \left\{ \overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^3} \right\}$.
   Soit $(x, y, z) \in F \bigcap G$:
   - $(x, y, z) \in G$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \lambda(1, 2, 1)$
   - $(x, y, z) \in F$ donc $x + 2y - z = 0 \Leftrightarrow \lambda + 2 \times 2\lambda - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

   Donc $(x, y, z) = 0.(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$.
   F et G sont donc bien en somme directe : $F + G = F \bigoplus G$
2. F et G sont supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$
   $\Leftrightarrow F \bigoplus G = \mathbb{R}^3$
   $\Leftrightarrow dim(F) + dim(G) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$ car F et G sont en somme directe.

   $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\right\} = \left\{(z - 2y, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\}$
   $= \left\{z(1, 0, 1) + y(-2, 1, 0), (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\}$
   $= Vect(\{(1, 0, 1), (-2, 1, 0\})$

   Les deux vecteurs obtenus forment une famille libre car ils ne sont pas colinéaires et ils génèrent F. Ils forment donc une base de F et $dim(F) = 2$.
   G est une droite vectorielle : $dim(G) = 1$.
   Ainsi $dim(F) + dim(G) = 2 + 1 = 3$ donc F et G sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.