Programme de khôlle 16

Semaine du 22 janvier 2024

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

1. Calculer la distance de X^2 à $Vect(1, X)$
2. Calculer la distance de X à Vect $(1, X^3)$
3. Calculer la distance de $1 + X^2$ à Vect (X, X^2).

Indication : on pourra s'inspirer de l'exercice 5.1 corrigé en TD pour obtenir les projetés orthogonaux.

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On considère F le sous-espace vectoriel d'équations :*

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$

1. *Déterminer une base orthonormale de F.*
2. *Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.*
3. *Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $u = (1, 1, 1, -1)$ sur F et en déduire la distance $\mathrm{d}(u, F)$.*

Exercice 2.2.
1. *Soit E un espace préhilbertien réel et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout $\vec{u} \in E, < \vec{u} \mid f(\vec{u}) >= 0$.*
   (a) *Pour $\vec{u}, \vec{v} \in E$, simplifier $< \vec{u} + \vec{v} \mid f(\vec{u} + \vec{v}) >$ et en déduire que $\langle \vec{u} \mid f(\vec{v})\rangle = -\langle \vec{v} \mid f(\vec{u})\rangle$.*

(b) *En déduire que :*

$$\ker(f) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$$

2. *On se place dans* $\mathbb{R}_2[X]$ *muni du produit scalaire suivant :*

$$< P \mid Q >= P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

On pose $F = \mathrm{Vect}(1, X)$. *Calculer* $\mathrm{d}\left(X^2, F\right)$.

Exercice 2.3. *Soit* $E = \mathbb{R}^4$ *muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique* $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. *On considère* G *le sous-espace vectoriel défini par les équations*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

1. *Déterminer une base orthonormale de* G.
2. *Déterminer la matrice dans* $\mathscr{B}$ *de la projection orthogonale* p_G *sur* G.
3. *Soit* $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *un élément de* E. *Déterminer la distance de* x *à* G.

Chap.11 : Espaces préhilbertiens réels

1 Généralités sur les espaces préhilbertiens
1.1 Produit scalaire
1.2 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$
1.3 Norme euclidienne
1.4 Distance euclidienne

2 Orthogonalité
2.1 Vecteurs orthogonaux
2.2 Vecteur orthogonal à un sous-espace vectoriel
2.3 Sous-espaces vectoriels orthogonaux
2.4 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel
2.5 Propriétés importantes

3 Bases orthonormales
3.1 La théorie
3.2 La pratique
3.3 Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée
3.4 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée

4 Projection orthogonale
4.1 Supplémentaire orthogonal
4.2 Projection orthogonale
4.3 Distance d'un point à un s-e-v de dimension finie

Chap.12 : Variables aléatoires réelles discrètes

1 Généralités sur les variables aléatoires discrètes
1.1 Définition, propriétés
1.2 Loi d'une VAR discrète
1.3 Fonction de répartition
1.4 Fonction d'une variable aléatoire

2 Moments d'une VAR discrète
2.1 Espérance
2.2 Variance et écart type