Interrogation 9 - CORRECTION

Exercice 0.1. *Soit le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$.*
On considère les polynômes :

$$P_1 = 2X + X^3, P_2 = X + X^2 + 2X^3 \text{ et } P_3 = 1 + X^2.$$

Soit la famille $\mathscr{F} = \{P_1, P_2, P_3\}$.

1. *$\mathscr{F}$ est-elle libre ?*
   Remarquons tout d'abord que cette famille n'est pas échelonnée en degrés.
   Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = \overrightarrow{O}_{\mathbb{R}_3[X]}$. Alors :

   $$\begin{aligned} &\lambda_1(2X + X^3) + \lambda_2(X + X^2 + 2X^3) + \lambda_3(1 + X^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2)X^3 + (\lambda_2 + \lambda_3)X^2 + (2\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

   La famille $\mathscr{F}$ est donc libre.
2. *$\mathscr{F}$ est-elle une base de E ?*
   Si $\mathscr{F}$ était une base de E alors on aurait $dim(E) = card(\mathscr{F}) = 3$. Or $dim(E) = dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$. Donc $\mathscr{F}$ n'est pas une base de E.
3. *Est-il possible de la compléter en une base de E ?*
   D'après le théorème de la base incomplète, toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.
   Soit le polynôme $P_4 = -1$. On montre facilement que la famille $\mathscr{F}' = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est libre.
   Or $dim(E) = 4 = card(\mathscr{F}')$ donc $\mathscr{F}'$ est une base de E.

Exercice 0.2. *Soient les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$:*

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\right\} \text{ et } G = Vect((1, 2, 1))$$

Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si :

1. *F et G sont en somme directe*
2. *$F \bigoplus G = E$*

1. *Il s'agit de prouver que $F \bigcap G = \left\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^3}\right\}$.*
   Soit $(x, y, z) \in F \bigcap G$:

- $(x, y, z) \in G$ *donc il existe* $\lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \lambda(1, 2, 1)$
- $(x, y, z) \in F$ *donc* $x + 2y - z = 0 \Leftrightarrow \lambda + 2 \times 2\lambda - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

Donc $(x, y, z) = 0.(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$.
F *et* G *sont donc bien en somme directe :* $F + G = F \bigoplus G$

2. F *et* G *sont supplémentaire dans* $\mathbb{R}^3$
$\Leftrightarrow F \bigoplus G = \mathbb{R}^3$
$\Leftrightarrow dim(F)+dim(G) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$ *car* F *et* G *sont en somme directe.*

$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\right\} = \left\{(z - 2y, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\}$
$= \left\{z(1, 0, 1) + y(-2, 1, 0), (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\}$
$= Vect(\{(1, 0, 1), (-2, 1, 0\})$

Les deux vecteurs obtenus forment une famille libre car ils ne sont pas colinéaires et ils génèrent F*. Ils forment donc une base de* F *et* $dim(F) = 2$.
G *est une droite vectorielle :* $dim(G) = 1$.
Ainsi $dim(F) + dim(G) = 2 + 1 = 3$ *donc* F *et* G *sont bien supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$.