

Programme de khôlle 5

Semaine du 9 octobre 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

Étudier la convergence des intégrales suivantes, puis calculer leur valeur en cas de convergence.

- | | |
|--|---|
| 1. $\int_1^2 \frac{dt}{(t-1)^2},$ | 4. $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ |
| 2. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}} dt,$ | 5. $\int_0^{\pi/2} \tan(t) dt$ |
| 3. $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$ | 6. $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt.$ |

Indication : Pour la dernière intégrale, on pourra utiliser une intégration par parties.

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. On considère l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$$

En posant $u = \sqrt{t}$, montrer que I est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 2.2. On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t + 1)(e^{-t} + 1)}$$

En posant $u = e^t$, montrer que I est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 2.3. On considère l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$$

En posant $t = (1 + \sin(x))/2$, montrer que I est convergente et calculer sa valeur.

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.2 : Rappels sur les applications linéaires

- 1 Définitions
- 2 Noyau et image
- 3 Représentation matricielle
- 4 Sous-espaces stables par un endomorphisme 5 Projecteurs et symétries

Chap.3 : Intégrales : rappels et généralisation

- 1 Rappels sur les intégrales d'une fonction continue sur un segment
 - 1.1 Définition et lien avec les primitives
 - 1.2 Propriétés de l'intégrale
 - 1.3 Intégration par partie et changement de variable
 - 1.4 Sommes de Riemann, théorème de la moyenne

- 2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

- 3 Extension de la notion d'intégrale

- 3.1 Sur un intervalle du type $[a; b[$ ou $]a; b]$
 - 3.2 Sur un intervalle du type $[a; +\infty[$ ou $] - \infty; a]$
 - 3.3 Sur un intervalle du type $]a; b[$ avec $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$
 - 3.4 Interprétation en termes d'aire sous la courbe
 - 3.5 Intégration par parties et changement de variable

- 4 Critères de convergence pour les fonctions positives

- 4.1 Les intégrales de référence
 - 4.2 Une propriété utile
 - 4.3 Critères de convergence pour les fonctions positives
 - 4.3.1 Inégalités
 - 4.3.2 Équivalents
 - 4.4 Comparaison séries-intégrales

- 5 Fonctions intégrables

- 5.1 Définition et application
 - 5.2 Propriétés