TP - Méthode d'Euler

1 Équations différentielles d'ordre 1

Considérons l'équation différentielle $\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y'(t) = f(t, y(t)) \end{cases}$ sur un intervalle $I = [a; b]$.
Grâce à la méthode d'Euler, on approxime la solution en des valeurs t_k ayant pour image $y(t_k)$.
La méthode consiste à approximer les valeurs $y(t_k)$ par les valeurs y_k de la suite définie par récurrence par $\begin{cases} t_{k+1} = t_k + h \\ y_{k+1} = y_k + h \times f(t_k, y_k) \end{cases}$.

Exercice 1.1. *On considère l'équation différentielle* $\begin{cases} y(1) = 1 \\ ty'(t) - 2y(t) = 0 \end{cases}$ *sur* $[1; 2]$.

1. *Quelle est la solution exacte ?*
2. *Rédiger une fonction sous Python qui :*
   - *Reçoit a, b et n en paramètres d'entrée.*
   - *Stocke les t_k dans une liste T.*
   - *Stocke les y_k dans une liste Y*
   - *Trace la courbe approximant la solution exacte dans un repère (utiliser l'annexe)*
3. *Modifier la fonction précédente pour tracer la solution exacte dans le même repère.*
4. *Tracer plusieurs courbes en augmentant la valeur de n. Que constate-t-on ?*

Exercice 1.2. *On considère l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y' - \frac{3y}{x} - x = 0 \end{cases} \quad \text{sur } [1; 2].$$

1. *Quelle est la solution exacte ?*
2. *Quel est le pourcentage d'erreur pour l'image de 2 si n= 20 ? si n=100 ?*
3. *Quelle conclusions en tirer ?*

Exercice 1.3. *On considère l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y' = \frac{1}{x} \end{cases} \quad sur\ [1;2].$$

1. *Quelle est la solution exacte ?*
2. *Appliquer la méthode d'Euler pour différentes valeurs de n.*
3. *Que dire du pourcentage d'erreur pour l'image de 2 ?*
4. *Tracer dans un même repère la courbe de la solution exacte et celle approchée par Euler sur un intervalle $[1;b]$ avec $b > 1$.*

Exercice 1.4. *Rédiger une fonction sous Python permettant d'approximer la primitive qui s'annule en a d'une fonction continue f sur un intervalle $[a;b]$.*
Par exemple, comment approximer sur $[0;2\pi]$ la primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui s'annule en 0 ?

2 Équations différentielles d'ordre 2

On souhaite résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$(E) : \begin{cases} y(0) = y0 \ et\ y'(0) = y0p \\ y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x) \end{cases} \quad \text{sur } [0;2].$$

Si l'on pose $Y = (y, y') = (y, z)$, alors :

$y'' + y = 0 \Leftrightarrow y'' = -y \Leftrightarrow Y' = (y', y'') = (y', -a(x)y' - b(x)y + c(x))$
$\Leftrightarrow Y' = F(Y)$ si $F(y, z) = (z, -a(x)z - b(x)y + c(x))$

Alors $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} Y(0) = (y0, yop) \\ Y' = F(Y) \end{cases}$

La méthode d'Euler peut encore s'appliquer ici. On reprend la méthode d'Euler connue avec quelques modifications puisque Y est un couple et F une application de deux variables.

Exercice 2.1. *Tracer le courbe de la solution approchée par la méthode d'Euler du problème de Cauchy suivant :*

$$(E) : \begin{cases} y(0) = 0 \ et\ y'(0) = 1 \\ y'' + y = 0 \end{cases} \quad sur\ [0;2].$$

On tracera dans le même repère la courbe de la solution exacte.

Exercice 2.2. *On considère l'équation différentielle :*

$$x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0, \quad x > 0$$

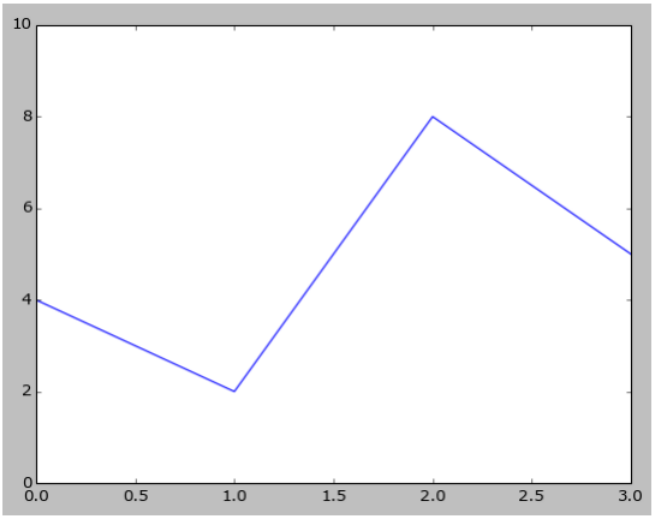
Tracer dans un même repère la courbe de la solution approchée par Euler ainsi que celle de la solution exacte ($y(x) = sin(ln(x))$).

ANNEXE

A l'aide de la bibliothèque Matplotlib, et de son instruction plot(), il est possible de tracer des courbes qui relient des points dont les abscisses et ordonnées sont fournies dans des listes. Pour cela, on utilise la suite d'instructions suivantes :

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.clf()                    # Efface le graphique précédent
plt.plot(list_x,list_y)      # Trace la courbe
plt.ylim(ymin,ymax)          # Définit la plage des ordonnées
plt.show()                   # Affiche la courbe
```

Par exemple pour :

```
list_x=[0,1,2,3]
list_y=[4,2,8,5]
ymin = 0
ymax = 10
```

On obtient la courbe ci-contre :