

Programme de khôlle 13

Semaine du 2 janvier 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

Démontrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel associé :

1. $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$;
2. $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ où $w \in E$ satisfait $w > 0$ sur $]a, b[$.
3. $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10x_2y_2$ sur $E = \mathbb{R}^2$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. 1. Déterminer les couples de fonctions (x, y) solutions sur \mathbb{R} du système différentiel

$$(S_1) : \begin{cases} x' = -2x + 4y \\ y' = -3x + 5y \end{cases}.$$

On pourra écrire le système sous la forme $X' = AX$, avec $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et diagonaliser A .

2. Parmi ces solutions, préciser le couple vérifiant $x(0) = -y(0) = 1$.

Exercice 2.2. On souhaite résoudre $(H) : (t + 1)x''(t) - x'(t) - tx(t) = 0$ sur $I =]-1; +\infty[$.

1. Vérifier que $t \mapsto e^t$ est solution.
2. Chercher les solutions de (H) sous la forme $x(t) = e^t u(t)$, où u est une fonction deux fois dérivable.

Exercice 2.3. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle :

$$(E) : y'' - 2ay' + y = e^x$$

suivant les valeurs du réel a .

Chap.9 : Équations différentielles scalaires

1 Généralités sur les équations différentielles linéaires

2 E.D. scalaires linéaires d'ordre 1

2.1 La théorie

2.1.1 Problème de Cauchy

2.1.2 Structure de l'ensemble des solutions

2.2 Résolution en pratique

3 E.D. scalaires linéaires d'ordre 2

3.1 La théorie

3.1.1 Problème de Cauchy

3.1.2 Structure de l'ensemble des solutions

3.2 E.D. linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3.3 E.D. linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants.

3.3.1 Méthode de Lagrange (ou d'abaissement d'ordre)

3.3.2 Changement de variable

Chap.10 : Espaces préhilbertiens réels

1 Généralités sur les espaces préhilbertiens

1.1 Produit scalaire

1.2 Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n