

# Programme de khôlle 13

Semaine du 2 janvier 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

## 1 Pratique calculatoire

Démontrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel associé :

1.  $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$  sur  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  ;
2.  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$  sur  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  où  $w \in E$  satisfait  $w > 0$  sur  $]a, b[$ .
3.  $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10x_2y_2$  sur  $E = \mathbb{R}^2$

## 2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

**Exercice 2.1.** 1. Déterminer les couples de fonctions  $(x, y)$  solutions sur  $\mathbb{R}$  du système différentiel

$$(S_1) : \begin{cases} x' = -2x + 4y \\ y' = -3x + 5y \end{cases}.$$

On pourra écrire le système sous la forme  $X' = AX$ , avec  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et diagonaliser  $A$ .

2. Parmi ces solutions, préciser le couple vérifiant  $x(0) = -y(0) = 1$ .

**Exercice 2.2.** On souhaite résoudre  $(H) : (t + 1)x''(t) - x'(t) - tx(t) = 0$  sur  $I = ]-1; +\infty[$ .

1. Vérifier que  $t \mapsto e^t$  est solution.
2. Chercher les solutions de  $(H)$  sous la forme  $x(t) = e^t u(t)$ , où  $u$  est une fonction deux fois dérivable.

**Exercice 2.3.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$(E) : y'' - 2ay' + y = e^x$$

suivant les valeurs du réel  $a$ .

### **Chap.9 : Équations différentielles scalaires**

1 Généralités sur les équations différentielles linéaires

2 E.D. scalaires linéaires d'ordre 1

2.1 La théorie

2.1.1 Problème de Cauchy

2.1.2 Structure de l'ensemble des solutions

2.2 Résolution en pratique

3 E.D. scalaires linéaires d'ordre 2

3.1 La théorie

3.1.1 Problème de Cauchy

3.1.2 Structure de l'ensemble des solutions

3.2 E.D. linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3.3 E.D. linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants.

3.3.1 Méthode de Lagrange (ou d'abaissement d'ordre)

3.3.2 Changement de variable

### **Chap.10 : Espaces préhilbertiens réels**

1 Généralités sur les espaces préhilbertiens

1.1 Produit scalaire

1.2 Produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$