Concours Blanc - Mathématiques
Lycées A.Artaud-E.D'Alzon-J.Ferry-G.Tillion

Lundi 11 mars 2024

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 - Polynômes de Tchebychev (Concours EPITA-IPSA-ESME PT-TSI 2023)

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ ceux de degré au plus n.
Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, on désigne par $\mathrm{cd}(P)$ son coefficient dominant et par $\deg(P)$ son degré.

Partie 1 - Quelques propriétés
Soit (T_n) la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\begin{cases} T_0 & = & 1 \\ T_1 & = & X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} & = & 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$$

1. Montrer que $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.
2. Déterminer les racines carrées complexes de $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}i$. En déduire celles de $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}i$.
3. En déduire les solutions complexes de l'équation $T_4(z) = -\dfrac{17}{8}$.
4. Montrer simultanément et par une récurrence double que $\mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}$,et $\deg(T_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer que la fonction polynomiale associée à T_n a même parité que n.

On s'intéresse, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, aux polynômes vérifiant la relation $(\star_n)$:

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}(\mathbf{cos}(\theta)) = \mathbf{cos}(\mathbf{n}\theta)$$

6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ T_n\left(\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)\right) = \dfrac{1}{2}\left(z^n + \dfrac{1}{z^n}\right)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, en déduire que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que T_n est le seul polynôme de $\mathbb{C}[X]$ à vérifier la relation $(\star_n)$.
9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, en déduire une expression de $\cos(4\theta)$ en fonction de puissances de $\cos(\theta)$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(X^2-1)T_n'' + XT_n' - n^2T_n = 0$. On pourra dériver la relation $(\star_n)$.
11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$.

12. En déduire l'ensemble des racines de T_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 2 - Famille orthogonale
On considère l'application $< \cdot, \cdot >$ définie par :

$$\forall(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \in (\mathbb{R}[\mathbf{X}])^{\mathbf{2}},\ < \mathbf{P},\mathbf{Q} >= \int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{P(t)Q(t)}}{\sqrt{\mathbf{1-t^2}}}\mathbf{dt}.$$

13. Montrer que $I_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{dt}$ est convergente et vaut π.
14. Montrer que l'application $< \cdot, \cdot >$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X]$.
15. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On munit $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$.
On note $\| \cdot \|_{\mathbf{2}}$ la norme associée à ce produit scalaire et définie par :

$$\forall \mathbf{P} \in \mathbb{R}[\mathbf{X}],\ \|\mathbf{P}\|_{\mathbf{2}} = \sqrt{< \mathbf{P},\mathbf{P} >}.$$

16. Soit $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{dt}$ pour tout entier naturel n.
    Justifier que les intégrales I_n existent puis montrer que $I_1 = I_3 = 0$ et que $I_2 = \dfrac{\pi}{2}$.
    On pourra utiliser le changement de variable $t = \cos(u)$. On admettra par la suite que $I_4 = \dfrac{3\pi}{8}$.
17. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$.
18. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale et déterminer la norme de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.
    On pourra utiliser le changement de variable $t = \cos(u)$.

Exercice 2 - Deux équations différentielles (Concours ATS 2023)

Soit $\alpha \geqslant 0$ un paramètre réel positif. On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$y'' + \alpha y = 0 \qquad (E_\alpha)$$

$$4ty''(t) + 6y'(t) + \alpha y(t) = 0 \qquad (F_\alpha)$$

Pour chacune de ces équations différentielles, l'inconnue y est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ à valeurs réelles.

1. (a) Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E_0).
   (b) Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E_α) lorsque $\alpha > 0$.
2. Soient u, v deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, et vérifiant

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad u(t) = tv(t^2).$$

   (a) Donner, en tout point $t > 0$, une expression de $u'(t)$ en fonction de t, $v(t^2)$ et $v'(t^2)$.

(b) Montrer que, pour tout réel $t > 0$, on a $u''(t) = 4t^3 v''(t^2) + 6tv'(t^2)$.

(c) En déduire que u est solution de (E_α) si et seulement si v est solution de (F_α)

3. (a) Déduire de la question précédente que les solutions de l'équation différentielle (F_0) sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{C_1}{\sqrt{t}} + C_2,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.

(b) Donner de même la forme générale des solutions de (F_α) lorsque $\alpha > 0$.

Exercice 3 - Série de Fourier (Concours ATS 2023)

On considère la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(-\pi) = 0$ et

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad f(t) = tcos(t).$$

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. On note

$$Sf(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$$

la série de Fourier de la fonction f.

(a) Calculer les coefficients de Fourier a_n pour $n \geqslant 0$.

(b) Calculer le coefficient de Fourier b_1. *On rappelle que* $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ *pour tout réel* t.

(c) Calculer les coefficients b_n pour tout entier $n \geqslant 2$. *On rappelle que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad \cos(x)\sin(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(y-x)}{2}.$$

3. (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}(f(t+h) + f(t-h))$.

(b) Montrer que la série de Fourier Sf converge vers f. Énoncer le théorème utilisé.

4. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$b_n^2 = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}.$$

(b) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$ est convergente de somme

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2}.$$

(c) En déduire que $\sum_{n=2}^{+\infty} b_n^2 = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}$.

5. (a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)^2 \mathrm{dt}$. *On rappelle que* $\cos(t)^2 = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$ *pour tout réel* t.

   (b) En appliquant le théorème de Parseval à la fonction f, trouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

6. Écrire une fonction **calculSomme**, en *Python*, qui prend en entrée un entier naturel n non nul, et renvoie la valeur $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

7. On admet que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6} \right| \leqslant \frac{1}{n}.$$

   Écrire une fonction **approx**, en *Python*, qui prend en entrée un réel **eps** strictement positif, et renvoie une approximation de $\dfrac{\pi^2}{6}$ à **eps** près.