Devoir Surveillé 2 - CORRECTION

Durée : 2 heures
Calculatrice interdite

Exercice 0.1. *1. Soit la fonction f définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$.*

(a) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ ainsi que le domaine de dérivabilité $\mathscr{D}'_f$.
$\mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x^2-1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}, (x-1)(x+1) \geq 0\}$
$=]-\infty; -1] \cup [1; +\infty]$
$\mathscr{D}'{}_f = \{x \in \mathbb{R}, x^2-1 > 0\} =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

(b) Calculer $f'(x)$ sur $\mathscr{D}'_f$.
Soit $x \in \mathscr{D}'_f$, alors : $f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

(c) En déduire la dérivée sur $]1; +\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto ln(x + \sqrt{x^2-1})$ dont on simplifiera au mieux l'expression.

$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

2. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{3e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

(a) Déterminer les primitives de h sur $\mathbb{R}$.
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + e^{2x}$ alors u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
On observe que $h(x) = \frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$. Les primitives de h sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonction

$$F : x \longmapsto \frac{3}{2}ln(\mid u(x) \mid + k = \frac{3}{2}ln(1+e^{2x}) + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

car $u(x) > 0$.

(b) En déduire la primitive H de la fonction h qui s'annule en 0. On sait que $H(x) = \frac{3}{2}ln(1+e^{2x}) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
$H(0) = \frac{3}{2}ln(1+e^0) + k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}ln(2)$.
La primitive recherchée est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \frac{3}{2}ln(1+e^{2x}) - \frac{3}{2}ln(2) = \frac{3}{2}(ln(1+e^{2x}) - ln(2))$$

Exercice 0.2. *Extrait adapté de Mines de Douai 1984*

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x^2-1)Arctan(\frac{1}{2x-1})$$

et on appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. *Déterminer le domaine de définition* $\mathscr{D}_f$ *ainsi que le domaine de dérivabilité* $\mathscr{D}'_f$.
   $\mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, 2x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} = \mathscr{D}'_f$
2. *Montrer que sur* $\mathscr{D}'_f - \{0\}$ *la dérivée de* f *peut s'exprimer sous la forme* $f'(x) = 2xg(x)$ *où*

$$g(x) = Arctan(\tfrac{1}{2x-1}) - \tfrac{x^2-1}{2x(2x^2-2x+1)}.$$

   $f'(x) = 2xArctan(\frac{1}{2x-1}) + (x^2-1)\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$
   Avec $u(x) = \frac{1}{2x-1}$ *et* $u'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2}$.
   Ainsi :

$$f'(x) = 2xArctan(\tfrac{1}{2x-1}) + (x^2-1)\frac{\frac{-2}{(2x-1)^2}}{1+\frac{1}{(2x-1)^2}}$$
$$= 2xArctan(\tfrac{1}{2x-1}) - \tfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$$
$$= 2x\left[Arctan(\tfrac{1}{2x-1}) - \tfrac{1}{2x} \times \tfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1}\right] = 2xg(x)$$

3. *Montrer que* $g'(x) = -\frac{2x^4-4x^3+9x^2-4x+1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2}$.
   $g'(x) = -\frac{1}{2x^2-2x+1} - \frac{1}{2}\frac{2x(2x^3-2x^2+x)-(x^2-1)(6x^2-4x+1)}{x^2(2x^2-2x+1)^2}$
   $= \frac{-2x^2(2x^2-2x+1)+2x^4-7x^2+4x-1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2} = -\frac{2x^4-4x^3+9x^2-4x+1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2}$
4. *On admet que :*

$$\forall x \in \mathbb{R},^4 -4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$$

   Dresser le tableau de variation de g.
   D'après la question précédente, $g'(x) < 0$ *sur* $]-\infty;0[\cup]0;\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2};+\infty[$.
   Donc g *est strictement décroissante sur chacun de ces intervalles.*

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = Arctan(0) - 0 = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{x^2-1}{2x(2x^2-2x+1)} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} Arctan(\frac{1}{2x-1}) = Arctan(-1) = \frac{-\pi}{2}$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} g(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{x^2-1}{2x(2x^2-2x+1)} = -\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} Arctan(\frac{1}{2x-1}) = Arctan(-1) = \frac{-\pi}{2}$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} g(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x<\frac{1}{2}}} \frac{1}{2x-1} = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} Arctan(x) = \frac{-\pi}{2}$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x<\frac{1}{2}}} Arctan(\frac{1}{2x-1}) = \frac{-\pi}{2}$. *De plus* $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x<\frac{1}{2}}} \frac{x^2-1}{2x(2x^2-2x+1)} = \frac{-3}{2}$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}}} g(x) = \frac{-\pi}{2} + \frac{3}{2} < 0$

- $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}} \frac{1}{2x-1} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} Arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ *donc :*

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}} Arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}}} g(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} > 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = Arctan(0) - 0 = 0$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
g	$0 \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow \frac{-\pi}{2} + \frac{3}{2} < 0$	‖ $\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} \searrow 0$	

5. *Montrer qu'il existe un unique réel* $\alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ *tel que* $g(x) = 0$.
   On sait que :
   - *g est strictement décroissante sur* $\left]0; \frac{1}{2}\right[$
   - *g est continue sur* $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ *comme composée de fonctions continuées.*
   - $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}}} g(x) = \frac{-\pi}{2} + \frac{3}{2} < 0$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x) = +\infty > 0$

   Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ *tel que* $g(x) = 0$.

6. *Quelles sont les variations de f ? (On ne demande pas les limites aux bornes).*
   Le tableau de variation de g nous indique le signe de $g(x)$ *donc de* $f'(x) = 2xg(x)$.
   On en déduit que f est :
   - *strictement croissante sur* $]-\infty; \alpha]$ *et sur* $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$
   - *strictement décroissante sur* $\left[\alpha; \frac{1}{2}\right[$.

Exercice 0.3. *Extrait du concours commum 2006 des écoles des mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes*
Soit n un entier naturel. Si n est non nul, on note f_n *la fonction définie sur*

$\mathbb{R}$ *qui associe à un réel* x *lorsque c'est possible* $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{2 - \cos x} - \dfrac{x}{n}$.
On note f_0 *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *qui associe à un réel* x *lorsque c'est possible* $f_0(x) = \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$.

Généralités sur f_n.

Soit n *un entier naturel fixé.*

1. *Déterminer le domaine de définition* $\mathscr{D}_{f_n}$ *de* f_n.
$\mathscr{D}_{f_n} = \{x \in \mathbb{R}, 2 - cos(x) \neq 0\}$
Or $-1 \leq cos(x) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq cos(x) - 2 \leq -1$.
Donc $cos(x) - 2 \neq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et :* $\mathscr{D}_{f_n} = \mathbb{R}$

2. f_n *est-elle paire ?* f_n *est-elle impaire ? On justifiera sa réponse et on distinguera les cas* $n = 0$ *et* $n \neq 0$.
Dans les deux cas $\mathscr{D}_{f_n} = \mathbb{R}$ *est symétrique par rapport à* 0. *Soit* $x \in \mathscr{D}_{f_n}$, *alors :*

- *Si* $n \neq 0$ *:*

$$f_n(-x) = \tfrac{sin(-x)}{2-cos(-x)} - \tfrac{-x}{n} = -\tfrac{sin(x)}{2-cos(x)} + \tfrac{x}{n} = -f_n(x)$$

  Donc f_n *est impaire.*

- *Si* $n = 0$ *:*

$$f_0(-x) = \tfrac{sin(-x)}{2-cos(-x)} = -\tfrac{sin(x)}{2-cos(x)} = -f_n(x)$$

  Donc, dans tous les cas, f_n *est impaire.*

3. f_n *est-elle* 2π*-périodique ? On distinguera les cas* $n = 0$ *et* $n \neq 0$.
$\mathscr{D}_{f_n} = \mathbb{R}$ *est stable par translation de* 2π. *Soit* $x \in \mathscr{D}_{f_n}$, *alors :*

- *si* $n \neq 0$ *:*$f_n(x + 2\pi) = \tfrac{sin(x+2\pi)}{2-cos(x+2\pi)} - \tfrac{x+2\pi}{n} = \tfrac{sin(x)}{2-cos(x)} - \tfrac{x}{n} - \tfrac{2\pi}{n} = f_n(x) - \tfrac{2\pi}{n} \neq f_n(x)$ *donc* f_n *n'est pas* $2\pi-$ *périodique.*
- *si* $n = 0$ *:*

$$f_0(x + 2\pi) = \tfrac{sin(x+2\pi)}{2-cos(x+2\pi)} = \tfrac{sin(x)}{2-cos(x)} - \tfrac{x}{n} = f_n(x)$$

  donc f_0 *est* $2\pi-$ *périodique.*

4. *Montrer qu'il suffit d'étudier* f_0 *sur* $[0, \pi]$ *pour tracer sa courbe sur* $\mathscr{D}_{f_0}$ *tout entier. On justifiera sa réponse.*
Notons $\mathscr{C}_{f_n}$ *la courbe de* f_n *dans un repère orthonormal* $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On sait que f_0 *est* $2\pi-$ *périodique. Il suffit donc d'étudier* f_0 *sur un intervalle d'amplitude* 2π *puis d'en déduire la courbe sur* $\mathbb{R}$ *par translations de vecteurs* $2\pi \overrightarrow{i}$.
Par ailleurs, f_0 *est impaire donc il suffit de l'étudier sur* $[0; \pi]$. *Une symétrie de centre O permettra d'obtenir la courbe sur* $[-\pi; 0]$.

Étude de la fonction f_0.

5. *Étudier la dérivabilité de f_0 sur D. Déterminer l'expression de sa dérivée.*

f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f_0'(x) = \frac{cos(x)\times(2-cos(x)-sin(x)\times sin(x)}{(2-cos(x))^2} = \frac{2cos(x)-(cos^2(x)+sin^2(x))}{(2-cos(x))^2}$

$= \frac{2cos(x)-1}{(2-cos(x))^2}$

6. *Étudier le signe de la dérivée de f_0 sur $[0,\pi]$.*

$(2-cos(x))^2 > 0$ *donc* $f_0'(x)$ *est du même signe que* $2cos(x)-1$.

$2cos(x)-1 \geq 0 \Leftrightarrow cos(x) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [0; \frac{\pi}{3}]$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

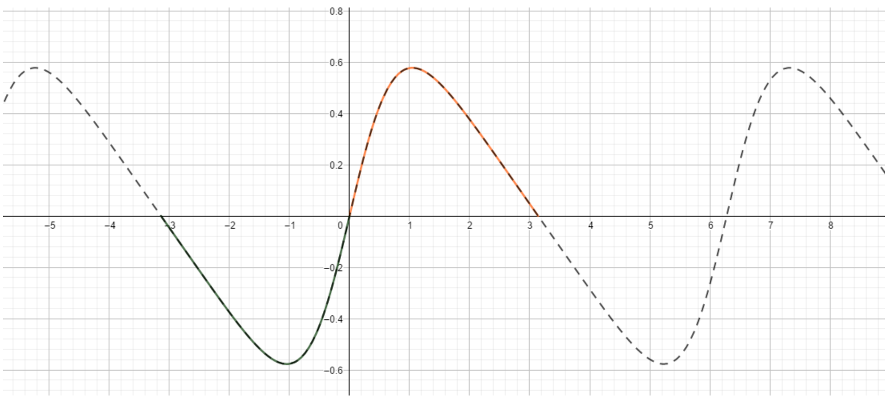
7. *Déterminer le tableau de variations sur $[0,\pi]$ et tracer l'allure de la courbe de f_0 sur $\mathbb{R}$ dans le plan rapporté à un repère adapté.*

Indication : $\frac{\sqrt{3}}{3}$ *admet* $0,577$ *comme valeur approchée par défaut à* 10^{-3} *près.*

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f_0'(x)$		$+$	0	$-$	
f_0	*0*	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	*0*

En effet :

- $f_0(0) = 0 = f_0(\pi)$
- $f_0(\frac{\pi}{3}) = \frac{sin(\frac{\pi}{3})}{2-cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



8. *Déterminer les valeurs maximales et minimales atteintes par $f_0(x)$ quand x parcourt $\mathbb{R}$. En déduire la valeur maximale atteinte par $|f_0(x)|$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$.*
D'après le tableau de variation précédent :

$$\forall x \in [0; \pi], 0 \leq f_0(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

f_0 étant impaire, on en déduit que le minimum de f_0 sur $[-\pi; \pi]$ est $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ et que son maximum est $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Par périodicité, ce sont les mêmes extrema sur $\mathbb{R}$.
Le maximum de $\mid f_0 \mid$ sur $\mathbb{R}$ est donc $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

9. *Déterminer la primitive de f_0 sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{3}$.*
La fonction sin est la dérivée de la fonction $x \mapsto 2 - cos(x)$. Les primitives sur $\mathbb{R}$ de f_0 sont donc les fonctions définies par :

$$F(x) = ln(\mid 2 - cos(x) \mid) + k = ln(2 - cos(x)) + k \ car\ 2 - cos(x) > 0$$

$F(\frac{\pi}{6}) = 0 \Leftrightarrow ln(2 - cos(\frac{\pi}{3})) + k = 0 \Leftrightarrow ln(\frac{3}{2}) + k = 0 \Leftrightarrow k = ln(\frac{2}{3})$.
La primitive recherchée est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = ln(2 - cos(x)) + ln(\frac{2}{3})$$