Devoir Surveillé 3

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

Exercice 0.1. ***Partie 1 - Étude de deux applications***

La notation $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *désigne le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.*

On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *et leurs fonctions polynomiales associées.*

On note $\mathscr{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

On définit les deux applications suivantes :

$$f : \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{P}\left(\dfrac{\mathrm{X}}{2}\right) + \mathrm{P}\left(\dfrac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right) \end{array} \right. \quad et\ \varphi : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{P} & \longrightarrow & \mathrm{P}(1) \end{array} \right.$$

1. *Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et montrer que f est linéaire.*
2. *Montrer que φ est linéaire.*
3. *Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, en indiquant les calculs intermédiaires.*
4. *L'application f est-elle injective ? surjective ?*
5. *Déterminer une base de $Ker(\varphi)$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$?*
6. *L'application φ est-elle injective ? surjective ?*

Partie 2- Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 *la matrice identité de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *et A la matrice* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Enfin, on note $\mathscr{B}'$ *la famille de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *définie par :*

$$\mathscr{B}' = (1, -2\mathrm{X}+1, 6\mathrm{X}^2 - 6\mathrm{X} + 1)$$

.

1. *Justifier que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.*
2. *Écrire la matrice de passage Q de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.*
3. *Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.*
4. *Écrire la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.*
5. *Démontrer que $A^n = \mathrm{Q}\mathrm{M}^n\mathrm{Q}^{-1}$.*

6. *Expliciter les neufs coefficients de* A^n.
7. *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\mathrm{P} = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2$ *avec* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, *déterminer* $f^n(\mathrm{P})$ *en fonction de* a, b *et* c.
8. *En déduire que :* $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \varphi\left(f^n(\mathrm{P})\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t$.

Partie 3 - Une autre preuve du résultat précédent

1. *À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :*

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(\mathrm{P}) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k}{2^n}\right)$$

2. *En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que :*

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \varphi\left(f^n(\mathrm{P})\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 0.2. *Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?*

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$.

   Indication : *on pourra s'intéresser à la limite de* $t \mapsto t^2 \times \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ *en* $+\infty$.

Exercice 0.3. *Dans tout cet exercice,* α *et* β *sont deux réels, et on pose pour tout entier* $n \geqslant 2$ *:*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}.$$

On se propose d'étudier la nature de la série $\sum u_n$ *(c'est-à-dire si elle converge ou diverge) selon la valeur de* α.

A. *Supposons* $\alpha > 1$.

1. *Soit* $\gamma \in]1;\alpha[$. *Que vaut* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\gamma u_n$ *?*
2. *En déduire qu'il existe un entier* $n_0 \geq 2$, *tel que* $\left(n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq \frac{1}{n^\gamma}\right)$.
3. *Quelle est la nature de la série* $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ *?*
4. *Une application : donner la nature de la série* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$.
5. *En déduire la nature de la série* $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$.

B. *Supposons* $\alpha < 1$.

1. *Donner la limite de* nu_n.
2. *En déduire qu'il existe un entier* $n_0 \geq 2$, *tel que* $\left(n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq \frac{1}{n}\right)$.
3. *Quelle est la nature de la série* $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ *?*
4. *Une application : donner la nature de la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.
5. *En déduire la nature de la série* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln\left(n^2+1\right)}{\sqrt{n}}$.

C. *Supposons* $\alpha = 1$.

On va maintenant étudier le cas où $\alpha = 1$. *Pour cela, on fixe* $\beta \in \mathbb{R}$ *et on considère la fonction* $f_\beta : [2; +\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f_\beta(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}.$$

1. *Montrer qu'il existe un entier* $n_0 \geq 2$ *tel que* f_β *est décroissante sur* $[n_0, +\infty[$.
2. *Montrer que pour tout entier* $k \geq n_0 + 1$, *on a*
$$\int_k^{k+1} f_\beta(t)dt \leq f_\beta(k) \leq \int_{k-1}^{k} f_\beta(t)dt.$$
3. *En déduire que pour tout entier* $n \geq n_0 + 1$, *on a*
$$\int_{n_0+1}^{n+1} f_\beta(t)dt \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} f_\beta(k) \leq \int_{n_0}^{n} f_\beta(t)dt$$
4. *Déterminer une primitive de* f_β *sur l'intervalle* $[2; +\infty[$.
Indication : *on distinguera les cas* $\beta = 1$ *et* $\beta \neq 1$.
5. *En minorant les sommes partielles, conclure que la série* $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ *diverge lorsque* $\beta \leq 1$.
6. *Montrer enfin que la série* $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ *converge lorsque* $\beta > 1$.