Programme de khôlle 1

Semaine du 6 septembre 2022

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

1. Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathscr{B}$.
   (a) $u = (-1, 0, 1), \mathscr{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, -1, 3))$
   (b) $u = X^3 + X^2, \mathscr{B} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$
   (c) $u : x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \mathscr{B} = (x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$
2. Déterminer le rang des matrices suivantes :

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *Soit* $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(-1) = 0\}$.
Montrer que F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$*, et que* $\mathbb{K}[\mathrm{X}] = \mathrm{F} \oplus \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.

Exercice 2.2. *(1). Montrer que les matrices :*

$$\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Déterminer alors les coordonnées de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ *dans cette base.*

Exercice 2.3. *On note :*

$F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - 3z = 0\}$ *et* $G = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x = 2y = -z\}$.

1. *Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Décomposer tout vecteur* $u = (x; y; z)$ *de* E *dans la somme directe* $E = F \oplus G$

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Familles de vecteurs.
Calcul matriciel.
Espaces vectoriels.
Matrices d'une famille de vecteurs.
Espaces vectoriels de dimension finie.