Devoir-Maison 4 - CORRECTION

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base orthonormée canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

On note $\mathrm{id} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire identité. On se donne l'application linéaire $s : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$\begin{cases} s(e_1) = e_3 \\ s(e_2) = e_4 \\ s(e_3) = e_1 \\ s(e_4) = e_2 \end{cases}$$

et l'application linéaire p définie, par $p = \frac{1}{2}(\mathrm{id} - s)$. L'objectif de cet exercice est de diagonaliser les applications linéaires s et p.

1. **L'objectif de cette question est d'étudier s**

   (a) **Donner la matrice S de s dans la base $\mathscr{B}$.**

   $$\text{Soit } S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} s(e_1) & s(e_2) & s(e_3) & s(e_4) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   ie

   $$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b) **Montrer que S est diagonalisable (cette question n'exige aucun calcul)**

   S est une matrice symétrique à coefficients réels, donc d'après le théorème spectral, S est diagonalisable.

   (c) **Calculer S^2. Que peut-on en déduire sur s ?**

   $$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

   On en déduit que S est la matrice d'une symétrie.

   (d) **Calculer le polynôme caractéristique de S.**

$P_S(X) = \mathrm{Det}(XI_4 - S) = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 & 0 \\ 0 & X & 0 & -1 \\ -1 & 0 & X & 0 \\ 0 & -1 & 0 & X \end{vmatrix}$

$P_S(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 & 0 \\ X-1 & X & 0 & -1 \\ X-1 & 0 & X & 0 \\ X-1 & -1 & 0 & X \end{vmatrix}$ $(C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$

$P_S(X) = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & X & 0 & -1 \\ 1 & 0 & X & 0 \\ 1 & -1 & 0 & X \end{vmatrix}$ (factorisation de la 1ère colonne par $(X-1)$)

$P_S(X) = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & X & 1 & -1 \\ 0 & 0 & X+1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & X \end{vmatrix}$ $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ puis $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$)

$P_S(X) = (X-1)\begin{vmatrix} X & 1 & -1 \\ 0 & X+1 & 0 \\ -1 & 1 & X \end{vmatrix}$ (développement par rapport à la 1ere colonne)

$P_S(X) = (X-1)(-1)^2(X+1)\begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix}$ (développement par rapport à la 2ème ligne)

Enfin

$P_S(X) = (X-1)(X+1)(X^2-1) = (X-1)(X+1)(X-1)(X+1) = (X-1)^2(X+1)^2$

(e) **Montrer que S admet deux valeurs propres, que l'on notera λ_1 et λ_2, et que l'on choisira telles que $\lambda_1 < \lambda_2$). Quels sont les ordres de multiplicité de λ_1 et λ_2 ?**

$P_S(X)$ a deux racines -1 et 1 de multiplicité 2 chacune, donc S a deux valeurs propres -1 et 1 de multiplicité 2 chacune.

On notera $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$

(f) **On note E_1 le sous-espace propre de l'endomorphisme s associé à la valeur propre λ_1. Donner une base (u_1, u_2) de E_1 , telle que les coordonnées des vecteurs u_1 et u_2 soient égales à $0, 1$ ou -1.**

Soit $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$$u \in E_1 \Longleftrightarrow S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$u \in E_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 & + & 0 & + & z & + & 0 & = & -x \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & t & = & -y \\ x & + & 0 & + & 0 & + & 0 & = & -z \\ 0 & + & y & + & 0 & + & 0 & = & -t \end{cases}$$

$$u \in E_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x & + & 0 & + & z & + & 0 & = & 0 \\ 0 & + & y & + & 0 & + & t & = & 0 \\ x & + & 0 & + & z & + & 0 & = & 0 \\ 0 & + & y & + & 0 & + & t & = & 0 \end{cases}$$

$$u \in E_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} z & = & -x \\ t & = & -y \end{cases}$$

$$u \in E_1 \Longleftrightarrow u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Posons $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Alors $E_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

De plus u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc (u_1, u_2) est une base de E_1.

(g) **On note E_2 le sous-espace propre de l'endomorphisme s associé à la valeur propre λ_2. Donner une base (u_3, u_4) de E_2 , telle que les coordonnées des vecteurs u_3 et u_4 soient égales à 0 ou 1.**

Soit $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$$u \in E_2 \Longleftrightarrow S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$u \in E_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 & + & 0 & + & z & + & 0 & = & x \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & t & = & y \\ x & + & 0 & + & 0 & + & 0 & = & z \\ 0 & + & y & + & 0 & + & 0 & = & t \end{cases}$$

$$u \in E_1 \iff \begin{cases} -x & + & 0 & + & z & + & 0 & = & 0 \\ 0 & - & y & + & 0 & + & t & = & 0 \\ x & + & 0 & - & z & + & 0 & = & 0 \\ 0 & + & y & + & 0 & - & t & = & 0 \end{cases}$$

$$u \in E_2 \iff \begin{cases} z & = & x \\ t & = & y \end{cases}$$

$$u \in E_1 \iff u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Posons $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors $E_2 = \text{Vect}(u_3, u_4)$.

De plus u_3 et u_4 ne sont pas colinéaires, donc (u_3, u_4) est une base de E_2.

(h) **Trouver une matrice D_1 diagonale et une matrice inversible Q_1 telles que $S = Q_1 D_1 Q_1^{-1}$. On ne demande pas de calculer Q_1^{-1}.**

Soit Q_1 la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ et D_1 la matrice de s dans la base $\mathscr{B}'$

Alors $D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonale,

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q_1^{-1} la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ vers la base $\mathscr{B}$

et, d'après le théorème de changement de bases,

$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(s) P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$

ie

$S = Q_1 D_1 Q_1^{-1}$.

2. **L'objectif de cette question est d'étudier p.**

(a) **Donner la matrice P de p dans la base $\mathscr{B}$.**

$$\text{Soit } P = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p(e_1) & p(e_2) & p(e_3) & p(e_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

ie

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) **Calculer $p \circ p$. Que peut-on en déduire sur p ?**

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

D'où $P^2 = P$

On en déduit que P est la matrice d'une projection et, par conséquent, que p est une projection.

(c) **Calculer $p(u_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.**

$p(u_1) = \frac{1}{2}(u_1 - s(u_1)) = \frac{1}{2}(u_1 - (-u_1)) = u_1$
$p(u_2) = \frac{1}{2}(u_2 - s(u_2)) = \frac{1}{2}(u_2 - (-u_2)) = u_2$
$p(u_3) = \frac{1}{2}(u_3 - s(u_3)) = \frac{1}{2}(u_3 - (u_3)) = 0$
$p(u_4) = \frac{1}{2}(u_4 - s(u_4)) = \frac{1}{2}(u_4 - (u_4)) = 0$

(d) **Montrer que l'application linéaire p est diagonalisable.**

Dans la base $\mathscr{B}'$, la matrice de p est

$$\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p(u_1) & p(u_2) & p(u_3) & p(u_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc il existe une base dans laquelle p est diagonale, donc p est diagonalisable.

(e) **Trouver une matrice D_2 diagonale et une matrice inversible Q_2 telles que $P = Q_2 D_2 Q_2^{-1}$ On ne demande pas de calculer Q_2^{-1} .**

De même que pour 2.h.

Soit $Q_2 = Q_1$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ et D_2 la matrice de p dans la base $\mathscr{B}'$

Alors $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale,

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q_2^{-1} la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ vers la base $\mathscr{B}$
et, d'après le théorème de changement de bases,
$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p)P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$
ie
$P = Q_2 D_2 Q_2^{-1}$.

3. **On considère maintenant l'application linéaire $f = 3s + 4p$.**
   (a) **Donner la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$.**
   $f(e_1) = 3s(e_1) + 4p(e_1) = 3(e_3) + 4 \times \frac{1}{2}(e_1 - e_3) = 2e_1 + e_3$
   $f(e_2) = 3s(e_2) + 4p(e_2) = 3(e_4) + 4 \times \frac{1}{2}(e_2 - e_4) = 2e_2 + e_4$
   $f(e_3) = 3s(e_3) + 4p(e_3) = 3(e_1) + 4 \times \frac{1}{2}(-e_1 + e_3) = e_1 + 2e_3$
   $f(e_4) = 3s(e_4) + 4p(e_4) = 3(e_2) + 4 \times \frac{1}{2}(-e_2 + e_4) = e_2 + 2e_4$
   donc
   Dans la base $\mathscr{B}$, la matrice de f est
   $$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{ie } F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   (b) **En faisant le moins de calcul possible, trouver à l'aide des résultats précédents une matrice D_3 diagonale et une matrice inversible Q_3 telles que $F = Q_3 D_3 Q_3^{-1}$. On ne demande pas de calculer Q_3^{-1}.**
   $f(u_1) = 3s(u_1) + 4p(u_1) = 3(-u_1) + 4 \times u_1 = u_1$
   $f(u_2) = 3s(u_2) + 4p(u_2) = 3(-u_2) + 4 \times u_2 = u_2$
   $f(u_3) = 3s(u_3) + 4p(u_3) = 3(u_3) + 4 \times 0 = 3u_3$
   $f(e_4) = 3s(e_4) + 4p(e_4) = 3(u_4) + 4 \times 0 = 3u_4$
   Soit $Q_3 = Q_1$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ et D_3 la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$
   Alors $D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonale,
   $Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   Q_3^{-1} la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ vers la base $\mathscr{B}$
   et, d'après le théorème de changement de bases,
   $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p)P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$
   ie
   $S = Q_3 D_3 Q_3^{-1}$.