Programme de khôlle 20

Semaine du 15 mars 2021

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (5-10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

1. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 ?
   (a) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$
   (b) $g(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$,
   (c) $h(x) = |x|\sin x$
2. Étudier si les fonctions suivantes sont dérivables et C^1 sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *1. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a*

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2. On pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Démontrer que

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n < \ln(2n) - \ln n.$$

En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2.2. *On considère la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où f la fonction définie par :*

$$f(x) = 1 + \tfrac{1}{4} \sin \tfrac{1}{x}.$$

1. *Déterminer* $I = f(\mathbb{R}^*)$, *et montrer que* I *est stable par* f *(c'est-à-dire* $f(I) \subset I$*).*
2. *Démontrer qu'il existe* $\gamma \in I$ *tel que* $f(\gamma) = \gamma$.
   Indication : on pourra étudier la fonction $g(x) = f(x) - x$.
3. *Démontrer que, pour tout* $x \in I$,
   $$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$
4. *Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}, \mid u_n - \gamma \mid \leq (\frac{4}{9})^n \mid u_0 - \gamma \mid$
5. *Démontrer que* (u_n) *converge vers* γ.

Exercice 2.3. *On considère la suite récurrente définie par*

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, *où* f *la fonction définie sur* $[0; +\infty[$ *par* $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

1. (a) *Étudier les variations de* f *sur* $[0; +\infty[$ *et déterminer* $f(\left[\frac{1}{2}; 1\right])$.
   (b) *Montrer que :* $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], \mid f'(x) \mid \leq \frac{4}{9}$.
   (c) *Justifier que l'équation* $f(x) = x$ *admet une unique solution* α *sur* $[0; +\infty[$ *dont on donnera la valeur exacte.*
2. (a) *Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
   (b) *Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}, \mid u_{n+1} - \alpha \mid \leq \frac{4}{9} \mid u_n - \alpha \mid$.
   (c) *Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}, \mid u_n - \alpha \mid \leq (\frac{4}{9})^n$.
   (d) *En déduire la convergence de la suite* (u_n).

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.36 : Dérivabilité

1 Nombre dérivée, fonction dérivée
1.1 Dérivabilité en un point
Développement limité d'ordre 1.
Équation de la tangente en un point.
1.2 Dérivabilité à droite et à gauche en x_0
Demi-tangente verticale à gauche ou à droite.
1.3 Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle