

# Programme de khôlle 20

Semaine du 15 mars 2021

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (5-10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

## 1 Pratique calculatoire

1. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 ?

(a)  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

(b)  $g(x) = \begin{cases} x \sin(x) \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(c)  $h(x) = |x| \sin x$

2. Étudier si les fonctions suivantes sont dérivables et  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

## 2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

**Exercice 2.1.** 1. Démontrer que pour tout  $x > 0$ , on a

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2. On pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Démontrer que

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n < \ln(2n) - \ln n.$$

En déduire que  $(v_n)$  converge et déterminer sa limite.

**Exercice 2.2.** On considère la suite récurrente définie par  $u_0 \in \mathbb{R}^*$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , où  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{4} \sin \frac{1}{x}.$$

1. Déterminer  $I = f(\mathbb{R}^*)$ , et montrer que  $I$  est stable par  $f$  (c'est-à-dire  $f(I) \subset I$ ).
2. Démontrer qu'il existe  $\gamma \in I$  tel que  $f(\gamma) = \gamma$ .  
Indication : on pourra étudier la fonction  $g(x) = f(x) - x$ .
3. Démontrer que, pour tout  $x \in I$ ,

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$

4. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - \gamma| \leq (\frac{4}{9})^n |u_0 - \gamma|$
5. Démontrer que  $(u_n)$  converge vers  $\gamma$ .

**Exercice 2.3.** On considère la suite récurrente définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , où  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ .

1. (a) Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$  et déterminer  $f(\left[\frac{1}{2}; 1\right])$ .  
(b) Montrer que :  $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$ .  
(c) Justifier que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0; +\infty[$  dont on donnera la valeur exacte.
2. (a) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .  
(b) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9} |u_n - \alpha|$ .  
(c) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - \alpha| \leq (\frac{4}{9})^n$ .  
(d) En déduire la convergence de la suite  $(u_n)$ .

### 3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

#### Chap.36 : Dérivabilité

1 Nombre dérivée, fonction dérivée

1.1 Dérivabilité en un point

Développement limité d'ordre 1.

Équation de la tangente en un point.

1.2 Dérivabilité à droite et à gauche en  $x_0$

Demi-tangente verticale à gauche ou à droite.

1.3 Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

## 2 Opérations sur les fonctions dérivables

### 2.1 Opérations sur les fonctions dérivables en a

Dérivée d'une composée.

Dérivée de la fonction réciproque.

### 2.2 Extension aux fonctions dérivables sur un intervalle

## 3 Propriétés des fonctions dérivables

### 3.1 Notion d'extremum local

Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.

### 3.2 Théorème de Rolle

### 3.3 Accroissements finis et applications

Égalité des accroissements finis.

Inégalité des accroissements finis.

### 3.4 Théorème de la limite de la dérivée

## 4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

### 4.1 Dérivées successives