Interrogation 7

Exercice 0.1. *Donner un équivalent simple au voisinage de a :*

1. $f(x) = e^{\frac{3}{x}} - 1$ *avec* $a = +\infty$
   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$ *donc* $e^{\frac{3}{x}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{x}$
2. $f(x) = \frac{1-x^2}{ln(x)}$ *avec* $a = 1$.
   Posons $x = 1 + h$ *alors :*
   $$f(x) = f(1+h) = \frac{1-(1+h)^2}{ln(1+h)} = \frac{1-1-2h-h^2}{ln(1+h)} = \frac{-h(2+h)}{ln(1+h)}$$
   Or $ln(1+h) \underset{h\to0}{\sim} h$ *donc* $f(1+h) \underset{h\to0}{\sim} \frac{-h(2+h)}{h} = -2 - h$.
   Ainsi $f(x) \underset{x\to1}{\sim} -2 - (x-1) = -1 - x$
3. $f(x) = tan^3(x) \times ln(1 + sin(x))$ *avec* $a = 0$.
   On sait que $\lim\limits_{x\to0} sin(x) = 0$ *donc* $ln(1+sin(x)) \underset{x\to0}{\sim} sin(x)$.
   Or $sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$ *donc* $ln(1+sin(x)) \underset{x\to0}{\sim} x$.
   Par ailleurs, $tan^3(x) \underset{x\to0}{\sim} x^3$ *donc, par produit,* $f(x) \underset{x\to0}{\sim} x^4$.
4. $f(x) = \sqrt{1 + ln(1+x^2)} - 1$ *avec* $a = 0$.
   On sait que $\lim\limits_{x\to0} ln(1+x^2) = 0$ *donc* $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{2}ln(1+x^2)$.
   Or $ln(1+x^2) \underset{x\to0}{\sim} x^2$ *donc* $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$.

Exercice 0.2. *Définir, si possible, le prolongement par continuité en* 0 *des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x) = \frac{\sqrt{1+sin^2(x)}-1}{x^2}$
   On sait que $\lim\limits_{x\to0} sin^2(x) = 0$ *donc* $\sqrt{1+sin^2(x)} - 1 \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{2}sin^2(x)$.
   Or $sin^2(x) \underset{x\to0}{\sim} x^2$ *donc* $\sqrt{1+sin^2(x)} - 1 \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$.
   Par quotient, on a donc $f_1(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{2}$.
   Conclusion : $\lim\limits_{x\to0} f_1(x) = \frac{1}{2}$, *on peut donc prolonger* f_1 *par continuité en* 0 *en posant :* $g_1(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$
2. $f_2(x) = \frac{ln(1+3x)}{tan(2x)}$
   On sait que $\lim\limits_{x\to0} 3x = 0$ *donc* $ln(1+3x) \underset{x\to0}{\sim} 3x$.
   On sait que $\lim\limits_{x\to0} 2x = 0$ *donc* $tan(2x) \underset{x\to0}{\sim} 2x$.
   Donc, par quotient : $f_2(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{3}{2}$.

Conclusion : $\lim_{x \to 0} f_2(x) = \frac{3}{2}$, *on peut donc prolonger* f_2 *par continuité en* 0 *en posant :* $g_2(x) = \begin{cases} f_2(x) \ si \ x \neq 0 \\ \frac{3}{2} \ si \ x = 0 \end{cases}$