Exercices
Chap.1 : Compléments d'algèbre linéaire

1 Matrices

Exercice 1.1. *Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et le cas échéant calculer leur inverse.*

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.2. *Discuter, selon les valeurs du paramètre réel λ, l'existence et le nombre de solutions des systèmes suivants. Dans chaque cas on donnera l'ensemble des solutions du système.*

1. $\begin{cases} -(2+\lambda)x - 2y - 6z = 0 \\ x - (1+\lambda)y + z = 0 \\ x + 3y + (5-\lambda)z = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -\lambda x + y - z = 0 \\ x - (2+\lambda)y + z = 0 \\ 2x - (1+\lambda)z = 0 \end{cases}$

Exercice 1.3. *On considère les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer P^2, Q^2, PQ, QP*
2. *Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.*
3. *Calculer $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 1.4. *On considère les matrices :*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que P est inversible et calculer son inverse.*
2. *Expliciter la matrice D définie par $A = PDP^{-1}$.*
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.*
   A l'avenir, ce résultat sera admis (inutile de le redémontrer).
4. *Expliciter alors A^n.*

Exercice 1.5. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$*

1. *Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, calculer $R(\theta)R(\varphi)$.*
2. *Pour quelles valeurs de θ la matrice $R(\theta)$ est-elle inversible ? Donner alors son inverse.*

2 Combinaisons linéaires, familles libres, familles génératrices

Exercice 2.1. 1. *Le vecteur $(3, 5, 4)$ est-il combinaison linéaire de*

$$((1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 2, 1)) \text{ ?}$$

2. *Le vecteur $P(X) = 2X^2 - 3X + 5$ est-il combinaison linéaire de*

$$\left(3X^2 - X, X^2 - 2X + 2\right) \text{ ?}$$

Exercice 2.2. *Écrire les ensembles suivant sous la forme $Vect(...)$:*

1. $E_1 = \left\{(x + y, x - y, 2y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
2. $E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x + 2y - 3z = 0\right\}$
3. $E_3 = \left\{(a + b)X^2 + 2aX - b \in \mathbb{R}[X]/(a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Exercice 2.3. *Déterminer une famille génératrice des ensembles suivants :*

1. $E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/2x + y - z = 0\right\}$
2. $E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/ - x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - 5z = 0\right\}$
3. $E_3 = \{P \in \mathbb{R}_3 [X], P(1) = P'(2) = 0\}$

Exercice 2.4. *Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?*

1. $\mathscr{B}_1 = ((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 8, 16))$ *dans* $\mathbb{R}^4$
2. $\mathscr{B}_2 = \left(X^3, X^2(X - 2), X(X - 2)^2, (X - 2)^3\right)$ *dans* $\mathbb{R}[X]$
3. $\mathscr{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right)$ *dans* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 2.5. *On se place dans l'espace vectoriel E des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on considère les fonctions suivantes :*

$$\begin{cases} e_1 : x \to 1 \\ e_2 : x \to x \\ e_3 : x \to x^2 \\ e_4 : x \to x^3 \end{cases} \quad \begin{cases} f_1 : x \to 1 \\ f_2 : x \to \cos(x) \\ f_3 : x \to \cos(2x) \\ f_4 : x \to \cos^2(x) \end{cases} \quad \begin{cases} g_1 : x \to 1 \\ g_2 : x \to x^3 + 1 \\ g_3 : x \to |x^3| \end{cases}$$

1. *La famille* (e_1, e_2, e_3, e_4) *est-elle libre ou liée ?*
2. *La famille* (f_1, f_2, f_3, f_4) *est-elle libre ou liée ?*
3. *La famille* (g_1, g_2, g_3) *est-elle libre ou liée ?*

Exercice 2.6. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *on considère la fonction* f_k *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_k(x) = \mathrm{e}^{kx}$*.*

On souhaite montrer que la famille de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *est une famille libre de l'espace vectoriel des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

Pour cela, nous allons raisonner par récurrence pour montrer que la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \text{"la famille } (f_1, f_2, \dots, f_n) \text{ est libre"}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*.*

1. *Justifier que la propriété* $\mathscr{P}(1)$ *est vraie.*
2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *fixé. On suppose que la propriété* $\mathscr{P}(n)$ *est vraie.*
   On souhaite montrer que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ *est libre, donc on cherche tous les réels* $a_1, \dots, a_{n+1}$ *tels que :*

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a_1 f_1(x) + \dots + a_{n+1} f_{n+1}(x) = 0$$

   (a) *Diviser l'égalité ci-dessus par* $\mathrm{e}^{(n+1)x}$ *puis en faisant tendre* x *vers une valeur bien choisie, montrer que* $a_{n+1} = 0$
   (b) *Montrer ensuite que* $a_1 = \dots = a_n = 0$ *puis conclure.*

3 Sous-espaces vectoriels

Exercice 3.1. *Soit* A *une matrice fixée de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*, où* n *est un entier naturel non nul.*
On considère l'ensemble $E = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$*.*
Montrer que E *est un espace vectoriel.*

Exercice 3.2. *On considère l'équation différentielle :*

$$y' + x^2 y = 0$$

Montrer, sans la résoudre, que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ *de cette équation est un espace vectoriel.*

Exercice 3.3. *Montrer que* $F = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n\right\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

4 Base, dimension, coordonnées

Exercice 4.1. *Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels puis en déterminer une base et la dimension :*

1. $A = \{(x-y, x+y, 2x-3y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/2x = y \text{ et } y = 3z\}$
3. $C = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4/2x - y + 2z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$
4. $D = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x+y+z & y \\ z & y & x \end{pmatrix} /(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
5. $E = \{P \in \mathbb{R}[X]/P = aX^2 + (b-2a)X + a - b + c \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$
6. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/P(1) = 0\}$
7. $G = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ *avec* $f_1(x) = x+1, f_2(x) = x-1, f_3(x) = 2-x$.

Exercice 4.2. *Soit a un réel et soient $\vec{x} = (1,1,a), \vec{y} = (1,a,1)$ et $\vec{z} = (a,1,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.*

Déterminer le rang de la famille $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. (On sera amené à distinguer plusieurs valeurs de a)

Exercice 4.3. 1. *Montrer que les trois ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de chacun d'eux :*

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; 2x + y = 0\}$$
$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x + 2y + 3z + t = 0\}$$
$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; t = -x + 2z\}$$

2. *Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.*
3. *Même question pour $G \cap H$.*

Exercice 4.4. *Dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ on considère les vecteurs :*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ et } \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.*
2. *Quelles sont, dans cette base, les coordonnées de $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$?*

Exercice 4.5. 1. *Montrer que la famille*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. *Déterminer les coordonnées de* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ *dans cette base.*

Exercice 4.6. *Soit* (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

1. *Montrer que la famille* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = ((1,1,1),(1,-1,0),(-1,1,-1))$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Déterminer les coordonnées de* e_1 *dans la base* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
   Même question pour e_2 *puis pour* e_3.

Exercice 4.7. *Dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}_3[X]$ *on considère la famille :*

$$\mathscr{B} = \{X^3, X^2(X-2), X(X-2)^2, (X-2)^3\}$$

1. *Montrer que* $\mathscr{B}$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$
2. *Déterminer les coordonnées du polynôme* $P = 4X^2 - 8X + 8$ *dans la base* $\mathscr{B}$.
3. *Déterminer la matrice de passage de la base canonique* $\mathscr{C}$ *de* $\mathbb{R}_3[X]$ *vers* $\mathscr{B}$ *puis vérifier le résultat de la question précédente.*

Exercice 4.8. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* $n \geqslant 2$ *et* $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ *une base de* E.

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, *on pose* $e'_j = (\sum_{i=1}^{n} e_i) - e_j$

1. *Montrer que la famille* $\mathscr{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ *est une base de* E.
2. *Donner la matrice de passage de* $\mathscr{B}$ *à* $\mathscr{B}'$ *et celle de* $\mathscr{B}'$ *à* $\mathscr{B}$.

5 Somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 5.1. *Dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}[X]$, *on considère les sous-espaces vectoriels :*

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(0) = 0\} \text{ et } G = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) \leqslant 0\}$$

Montrer que F *et* G *sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}[X]$

Exercice 5.2. *On se place dans l'espace vectoriel* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. *On note* D *le sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *constitué des matrices diagonales de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On pose de plus $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $F = \mathrm{Vect}(A, B)$.
Démontrer que D *et* F *sont supplémentaires dans* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5.3. *On se place dans l'espace vectoriel* $E = \mathbb{R}_n[X]\,(n \in \mathbb{N}^*)$, *et pour tout* $i \in [\![0; n]\!]$ *on note :*

$$F_i = \{P \in E / \forall j \in [\![0; n]\!] \backslash \{i\}, \quad P(j) = 0\}$$

On admet que les F_i *sont des sous-espaces vectoriels de* E.
Montrer que $E = F_0 \oplus F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$

6 Hyperplans

Exercice 6.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.*
On considère $H_1, H_2, \dots, H_n$ des hyperplans de E.

1. *À l'aide de la formule de Grassmann, montrer que* $\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant n-2$.
2. *À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur k, montrer que :*

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \quad \dim(H_1 \cap \ldots \cap H_k) \geqslant n-k$$

7 Exercices supplémentaires, plus difficiles...

Exercice 7.1.

1. *Dans $E = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ on définit une loi $+$ par :*

$$(x, y) + (x', y') = (xx', y + y')$$

et une loi externe à coefficients dans $\mathbb{R}$ par :

$$\lambda(x, y) = \left(x^{\lambda}, \lambda y\right).$$

Vérifier que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2. *$\mathbb{R}^2$ muni de la loi $+$ usuelle et de la loi externe définie par $\lambda(x, y) = (\lambda x, 0)$ est-il un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?*

Exercice 7.2. *Dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ on considère les matrices :*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathrm{Vect}(A_1, B_1) = \mathrm{Vect}(A_2, B_2)$

Exercice 7.3. *Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels. Montrer que si $F \cup G$ est un sous-espace de E alors $F \subset G$ ou $G \subset F$*