

Interrogation 3

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels, et $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$, la base canonique de E .

On considère l'endomorphisme $f : E \rightarrow E$ défini par :

$$f(P(X)) = P(X) + XP'(X),$$

où $P'(X)$ désigne la dérivée de $P(X)$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B} .
2. Calculer les valeurs propres de f .
3. Déterminer les sous-espaces propres de f .
4. La matrice de f est-elle diagonalisable ? Justifier.
5. Si f est diagonalisable, trouver une matrice diagonale semblable à la matrice de f et une matrice de passage P associée.
6. Si $P = aX^2 + bX + c$, exprimer $f \circ f \circ f \circ f(P)$ en fonction de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

