Devoir Surveillé 3 - CORRECTION

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

Concours ENSTIM

Exercice 0.1. ***Partie 1 - Étude de deux applications***

La notation $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *désigne le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.*

On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *et leurs fonctions polynomiales associées.*

On note $\mathscr{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

On définit les deux applications suivantes :

$$f : \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{P}\left(\dfrac{\mathrm{X}}{2}\right) + \mathrm{P}\left(\dfrac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right) \end{array} \right. \quad et\ \varphi : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{P} & \longrightarrow & \mathrm{P}(1) \end{array} \right.$$

1. *Vérifier que* f *est bien à valeurs dans* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *et montrer que* f *est linéaire.*
   Montrons que $f(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]) \subset \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$: *soit* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
   Les polynômes $\frac{\mathrm{X}}{2}$ *et* $\frac{\mathrm{X}+1}{2}$ *sont deux polynômes de degré 1 , donc par composition et opérations sur les degrés, les polynômes* $\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right)$ *et* $\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+1}{2}\right)$ *sont respectivement de degré au plus* $\deg(\mathrm{P}) \times \deg\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right)$ *et* $\deg(\mathrm{P}) \times \deg\left(\frac{\mathrm{X}+1}{2}\right)$ *c'est à dire de degré au plus 2 tous les deux.*
   Ainsi, puisque $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *est un espace vectoriel, on en déduit que le polynôme* $\frac{1}{2}\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+1}{2}\right)$ *est un élément de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$*, ce qui assure ainsi le fait que* f *est bien à valeurs dans* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
   Linéarité de f ***:*** *soient* $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \times \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On pose $\mathrm{R} = \lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q}$*, et montrons que* $f(\mathrm{R}) = \lambda f(\mathrm{P}) + f(\mathrm{Q})$.
   $f(R) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{R}\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right) + \mathrm{R}\left(\frac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right)$
   $= \frac{1}{2}\left((\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q})\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right) + (\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q})\left(\frac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right)$
   $= \frac{1}{2}\left(\lambda\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right) + \mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right) + \lambda\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+1}{2}\right) + \mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right)$
   $= \lambda\frac{1}{2}\left(\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right) + f\left(\frac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right) + \mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right)$
   $= \lambda f(\mathrm{P}) + f(\mathrm{Q})$
2. *Montrer que* φ *est linéaire.*
   Soient $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \times \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On pose $\mathrm{R} = \lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q}$*, et montrons que* $\varphi(\mathrm{R}) = \lambda\varphi(\mathrm{P}) + \varphi(\mathrm{Q})$.
   Par définition :

$$\varphi(\mathrm{R}) = \mathrm{R}(1) = (\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$

3. *Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, en indiquant les calculs intermédiaires.*
$f(1) = \frac{1}{2}\left(1\left(\frac{X}{2}\right) + 1\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$
$f(X) = \frac{1}{2}\left(X\left(\frac{X}{2}\right) + X\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2}\right) = \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}$
$f\left(\tilde{X}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\tilde{X}^2\left(\frac{X}{2}\right) + \tilde{X}^2\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{X}{2}\right)^2 + \left(\frac{X+1}{2}\right)^2\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{4} + \frac{X^2}{4} + X + \frac{1}{4}\right) = \frac{X^2}{4} + \frac{1}{4}\frac{X}{2}X + \frac{1}{8}$
Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

4. *L'application f est-elle injective ? surjective ?*
Puisque f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ qui est de dimension finie, d'après le théorème de caractérisation des automorphismes en dimension finie, on a :

$$\begin{aligned}(f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])) &\Leftrightarrow (f \text{ est injective }) \\ &\Leftrightarrow (f \text{ est surjective }) \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])) \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]))\end{aligned}$$

Puisque Mat $_{\mathscr{B}}(f)$ est triangulaire supérieure, son rang est égal au nombre de termes diagonaux non nuls, donc ici 3.
Or $\dim(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]) = 3$*, donc on en déduit que f est injective et surjective.*

5. *Déterminer une base de $Ker(\varphi)$. Quelle est la dimension de* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *?*
Par définition : $(\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}(\varphi)) \Leftrightarrow (\varphi(\mathrm{P}) = 0)$*. Ainsi, pour* $\mathrm{P} = c + b\mathrm{X} + a\mathrm{X}^2 \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *avec* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^2$*, on a :*

$$\begin{aligned}(\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}(\varphi)) &\Leftrightarrow (c + b + a = 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b - c \\ b = b \\ c = c \end{cases}, (b,c) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{P} = c + b\mathrm{X} + (-b-c)\mathrm{X}^2, (b,c) \in \mathbb{R}^2) \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{P} \in \mathrm{Vect}(1 - \mathrm{X}, 1 - \mathrm{X}^2))\end{aligned}$$

Par conséquent $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(1 - \mathrm{X}, 1 - \mathrm{X}^2)$*, cette famille étant clairement libre puisque formée de deux vecteurs non nuls non colinéaires. Ainsi, elle forme une base de* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *car génératrice et libre, et comme elle contient deux vecteurs, on en déduit que* $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 2$.

6. *L'application φ est-elle injective ? surjective ?*
Puisque φ est une application linéaire, par théorème :

$$(\varphi \textit{ est injective }) \Leftrightarrow (\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\tilde{0}\}).$$

Or d'après la question précédente, $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{\tilde{0}\}$ *et par suite,* φ *n'est pas injective.*

Puisque φ *est une application linéaire de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui est un espace de dimension finie, d'après le théorème de caractérisation des applications linéaires surjectives en dimension finie, on a :*

$$(\varphi \textit{ est surjective }) \Leftrightarrow \quad (\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R})).$$

Par ailleurs, d'après le théorème du rang, il vient :

$$\dim\left(\mathbb{R}_2[X]\right) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \mathrm{rg}(\varphi).$$

On en déduit donc que $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$ *et comme* $\dim(\mathbb{R}) = 1$*, on en déduit que* φ *est surjective.*

Partie 2- Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 *la matrice identité de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *et A la matrice* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Enfin, on note $\mathscr{B}'$ *la famille de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *définie par :*

$$\mathscr{B}' = \left(1, -2\mathrm{X}+1, 6\mathrm{X}^2 - 6\mathrm{X}+1\right)$$

.

1. *Justifier que la famille* $\mathscr{B}'$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
   La famille $\mathscr{B}'$ *est une famille de polynômes de degrés échelonnés.*
   Par théorème, elle est donc libre.
   Il s'agit donc d'une famille libre de 3 vecteurs dans un espace $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *qui est de dimension 3 , donc par théorème, elle en forme une base.*
2. *Écrire la matrice de passage* Q *de* $\mathscr{B}$ *à* $\mathscr{B}'$.
   Par définition d'une matrice de passage, on a : $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
3. *Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.*
   La matrice Q *étant une matrice triangulaire supérieure de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$*, elle est inversible si, et seulement si, tous ses termes diagonaux ne sont pas nuls, ce qui est le cas ici.*
   Un échelonnement réduit en lignes de la matrice augmentée $(\mathrm{Q} \mid \mathrm{I}_3)$ *permet d'obtenir l'inverse de* Q.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \sim_L \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow 6L_1 - L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 6 & 0 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 01 & \end{array}\right) \underset{\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_1 + 3L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

et ainsi $\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

4. *Écrire la matrice* M *de* f *dans la base* $\mathscr{B}'$ *en donnant les calculs intermédiaires.*
   D'après les formules de changement de base pour les endomorphismes, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{QMat}_{\mathscr{B}'}(f)\mathrm{Q}^{-1}$ *c'est à dire* $\mathrm{A} = \mathrm{QMQ}^{-1}$
   D'où :

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. *Démontrer que* $A^n = \mathrm{QM}^n\mathrm{Q}^{-1}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit la proposition* $\mathscr{P}(n)$: ´ $\mathrm{A}^n = \mathrm{QM}^n\mathrm{Q}^{-1}$‖
   Montrons par récurrence sur l'entier n, *que la proposition* $\mathscr{P}(n)$ *est vraie pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$.
   Initialisation : *par définition* $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_3$ *et* $\mathrm{QM}^0\mathrm{Q}^{-1} = \mathrm{QI}_3\mathrm{Q}^{-1}$ *]. Or* $\mathrm{QI}_3\mathrm{Q}^{-1} = \mathrm{I}_3$, *donc* $\mathrm{A}^0 = \mathrm{QM}^0\mathrm{Q}^{-1}$ *ce qui est bien* $\mathscr{P}(0)$. ***Hérédité :*** *soit* $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que l'on a* $\mathscr{P}(n)$, *et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a* $\mathscr{P}(n+1)$.
   Par définition, $A^{n+1} = A^n \times A$. *Or par hypothèse de récurrence,* $A^n = QM^nQ^{-1}$ *et précédemment on a montré que* $A = QMQ^{-1}$.
   Il vient alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^{n+1} &= \mathrm{QM}^n \underbrace{\mathrm{Q}^{-1} \times \mathrm{Q}}_{=I_3} \mathrm{MQ}^{-1} \\ &= \mathrm{QM}^n \times \mathrm{MQ}^{-1} \\ &= \mathrm{QM}^{n+1}\mathrm{Q}^{-1} \end{aligned}$$

   ce qui est bien $\mathscr{P}(n+1)$.

Conclusion : *la proposition $\mathscr{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.*

6. *Expliciter les neufs coefficients de A^n.*
Par un raisonnement par récurrence, on pourrait montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{M}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct donne alors :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2^{n+1}} & -\frac{1}{2^{n+1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3\times 2^{2n+1}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{6\times 4^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{P} = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(\mathrm{P})$ en fonction de a, b et c.*
La matrice de f^n dans $\mathscr{B}$ est par théorème, la matrice A^n.
Ainsi, on a :

$$Mat_{\mathscr{B}}\left(f^n(\mathrm{P})\right) = \mathrm{A}^n \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{P})$$

c'est à dire :$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^n(\mathrm{P})\right) = \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^n(\mathrm{P})\right) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{6\times 4^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + \frac{1}{2}\left(-1\frac{1}{2^n}\right) b + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6\times 4^{2n}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) c \\ \frac{1}{2^n} b + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right) c \\ \frac{1}{4^n} c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et ainsi, il vient :

$$\begin{gathered} f^n(\mathrm{P}) = a + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) b + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6\times 4^{2n}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) c + \\ \left(\frac{1}{2^n} b + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right) c\right) \mathrm{X} + \frac{1}{4^n} c\mathrm{X}^2. \end{gathered}$$

8. *En déduire que :* $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \varphi\left(f^n(\mathrm{P})\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t$.
   On reprend les notations des questions précédentes.
   Tout d'abord, on a :

   $\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t = \left[at + \frac{b}{2}t^2 + \frac{c}{3}t^3\right]_0^1 = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right) - 0 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$

   Par définition φ, *on a :*

   $\varphi\left(f^n(\mathrm{P})\right) = \left(f^n(\mathrm{P})\right)(1)$
   $= a + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)b + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6\times 4^{2n}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)c + \left(\frac{1}{2^n}b + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right)c + \frac{1}{4^n}c$

   Qui tend vers $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$ *puisque* $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ *et* $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$. *D'où le résultat demandé.*

Partie 3 - Une autre preuve du résultat précédent

1. *À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :*

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(\mathrm{P}) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k}{2^n}\right)$$

   Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. *Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit la proposition*

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } f^n(\mathrm{P}) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k}{2^n}\right) \text{ ».}$$

   Montrons par récurrence sur l'entier n *que la proposition* $\mathscr{P}(n)$ *est vraie pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$.
   Initialisation : *Par définition* $f^1(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P})$ *et par définition de* f, *on a :*

$$\begin{aligned} f(\mathrm{P}) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right) + \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2^1}\left(\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+0}{2^1}\right) + \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+1}{2^1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2^1}\sum_{k=0}^{1} \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k}{2^1}\right) \\ &= \frac{1}{2^1}\sum_{k=0}^{2^1-1} \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k}{2^1}\right) \end{aligned}$$

   ce qui est bien $\mathscr{P}(1)$.
   Hérédité : *soit* $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que l'on a* $\mathscr{P}(n)$, *et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a* $\mathscr{P}(n+1)$.
   Par définition, $f^{n+1}(\mathrm{P}) = f \circ f^n(\mathrm{P})$, *c'est à dire* $f^{n+1}(\mathrm{P}) = f\left(f^n(\mathrm{P})\right)$.
   En utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient :

$$\begin{aligned}
&f^{n+1}(\mathrm{P})\\
&= f\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k}{2^n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k}{2^n}\right)\right) \text{ \textit{par linéarité}}\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{2}\left(\mathrm{P}\left(\frac{\frac{\mathrm{X}+k}{2^n}}{2}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{\frac{\mathrm{X}+k}{2^n}+1}{2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k}{2^{n+1}}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k+2^n}{2^{n+1}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{2n-1}\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k}{2^{n+1}}\right)+\sum_{k=0}^{2^n-1}\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k+2^n}{2^{n+1}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{2n-1}\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k}{2^{n+1}}\right)+\sum_{k=2^n}{}^{2^n-1+2^n}\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k}{2^{n+1}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{2n-1}\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k}{2^{n+1}}\right)+\sum_{k=2^n}^{2\times 2^n-1}\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k}{2^{n+1}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{2n-1}\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k}{2^{n+1}}\right)+\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k}{2^{n+1}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2n+1-1}\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+k}{2^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathscr{P}(n+1)$.
Conclusion : *la proposition $\mathscr{P}(n)$ étant vraie au rang 1 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.*

2. *En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que :*

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \varphi\left(f^n(\mathrm{P})\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t$$

Le théorème de convergence des sommes de Riemann appliqué à $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *qui est clairement continue sur* $[0;1]$ *permet d'affirmer que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \quad \frac{1-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}\left(0+k\frac{1-0}{n}\right) = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 0.2. *Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?*

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$.

   Indication : *on pourra s'intéresser à la limite de* $t \mapsto t^2 \times \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ *en* $+\infty$.

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t-1}$ est continue sur $]0,1]$.
En 0, $\frac{1}{e^t-1}$ est équivalent à $\frac{1}{t}$.
Par comparaison à une intégrale de Riemann divergente, $\int_0^1 \frac{dt}{e^{t-1}}$ est divergente. A fortiori, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}$ est divergente.

2. La fonction $t \mapsto \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 \times \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} = \lim_{t\to+\infty} te^{-\sqrt{t}} = 0$$

par croissance comparée des fonctions polynomiales et exponentielles.
Ainsi :

$\exists c > 0, \forall t > c, t^2 \times \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} < 1$
$\Leftrightarrow \exists c > 0, \forall t > c, \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} < \frac{1}{t^2}$.

Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$ est convergente.

Exercice 0.3. *Dans tout cet exercice,* α *et* β *sont deux réels, et on pose pour tout entier* $n \geqslant 2$ *:*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}.$$

On se propose d'étudier la nature de la série $\sum u_n$ *(c'est-à-dire si elle converge ou diverge) selon la valeur de* α.

A. *Supposons* $\alpha > 1$.

1. *Soit* $\gamma \in]1;\alpha[$. *Que vaut* $\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n$ *?*
2. *En déduire qu'il existe un entier* $n_0 \geq 2$, *tel que* $\left(n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq \frac{1}{n^\gamma}\right)$.
3. *Quelle est la nature de la série* $\sum_{n\geq 2} u_n$ *?*
4. *Une application : donner la nature de la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$.
5. *En déduire la nature de la série* $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$.

1. *Pour tout* $n \geqslant 2, n^\gamma u_n = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} \ln^\beta n}$. *Vu que* $\alpha - \gamma > 0$, *on en déduit que* $\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = 0$ *(c'est clair si* $\beta \geqslant 0$, *cela résulte des croissances comparées si* $\beta < 0$ *).*

2. *Puisque* $\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = 0$*, on a (par définition de la limite) :*

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N},\quad n\geq n_0 \Longrightarrow |n^\gamma u_n|\leq\varepsilon.$$

En choisissant $\varepsilon = 1$*, on obtient l'existence d'un entier* n_0 *(qu'on peut choisir supérieur ou égal à 2) tel que*

$$n\geq n_0 \Longrightarrow |n^\gamma u_n|\leq 1 \Longrightarrow u_n\leq \frac{1}{n^\gamma}.$$

3. *La série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ *converge (puisque* $\gamma>1$ *), donc d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs (qui s'applique car* $u_n\geq 0$ *), la série* $\sum_{n\geq 2} u_n$ *converge.*
4. *On est dans le cas où* $(\alpha;\beta) = (2;-1)$*, donc la série* $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{n^2}$ *converge d'après la question précédente (puisque* $\alpha>1$ *).*
5. *On a* $\sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$*, puisque* $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ *et* $\frac{\ln n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*. Vu que* $\frac{\ln n}{n^2}>0$ *pour tout* $n\geq 2$*, on en déduit par le critère des équivalents que la série* $\sum_{n\geq1}\sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ *est de même nature que* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\ln n}{n^2}$*, donc la série* $\sum_{n\geq1}\sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ *converge*

B. *Supposons* $\alpha<1$.

1. *Donner la limite de* nu_n.
2. *En déduire qu'il existe un entier* $n_0\geq 2$*, tel que* $\left(n\geq n_0 \Longrightarrow u_n\geq\frac{1}{n}\right)$.
3. *Quelle est la nature de la série* $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ *?*
4. *Une application : donner la nature de la série* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.
5. *En déduire la nature de la série* $\sum\limits_{n\geq1}\frac{\ln\left(n^2+1\right)}{\sqrt{n}}$.

1. *Pour tout* $n\geqslant 2, nu_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}\ln^\beta n} = \frac{n^{|1-\alpha|}}{\ln^\beta n}$*, donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *(facile si.* $\beta\leq 0$*, par croissance comparée si* $\beta>0$*).*
2. *Vu que* $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$*, on a (par définition de la limite infinie) :*

$$\forall A>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N},\quad n\geq n_0\Longrightarrow nu_n\geq A.$$

En choisissant $A=1$*, on obtient l'existence d'un entier* n_0 *tel que :*

$$n\geq n_0\Longrightarrow nu_n\geq 1\Longrightarrow u_n\geq\frac{1}{n}.$$

3. *Vu que la série de Riemann* $\sum\frac{1}{n}$ *diverge, on en déduit par le critère de comparaison des séries à termes positifs que* $\sum_{n\geq 2} u_n$ *diverge.*

4. *On est dans le cas où* $(\alpha;\beta)=\left(\frac{1}{2};-1\right)$, *donc la série* $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ *diverge d'après la question précédente (puisque* $\alpha<1$ *).*
5. *On a* $\frac{\ln\left(n^2+1\right)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln n}{\sqrt{n}}$, *puisque*

$$\ln\left(n^2+1\right)=\ln\left(n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)=2\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=2\ln(n)+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

C. *Supposons* $\alpha=1$.

On va maintenant étudier le cas où $\alpha=1$. *Pour cela, on fixe* $\beta\in\mathbb{R}$ *et on considère la fonction* $f_\beta:[2;+\infty[\to\mathbb{R}$ *définie par :*

$$f_\beta(x)=\frac{1}{x(\ln(x))^\beta}.$$

1. *Montrer qu'il existe un entier* $n_0\geq 2$ *tel que* f_β *est décroissante sur* $[n_0,+\infty[$.
2. *Montrer que pour tout entier* $k\geq n_0+1$, *on a*

$$\int_k^{k+1} f_\beta(t)dt\leq f_\beta(k)\leq\int_{k-1}^{k} f_\beta(t)dt.$$

3. *En déduire que pour tout entier* $n\geq n_0+1$, *on a*

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f_\beta(t)dt\leq\sum_{k=n_0+1}^{n} f_\beta(k)\leq\int_{n_0}^{n} f_\beta(t)dt$$

4. *Déterminer une primitive de* f_β *sur l'intervalle* $[2;+\infty[$. *On distinguera les cas* $\beta=1$ *et* $\beta\neq 1$.
5. *En minorant les sommes partielles, conclure que la série* $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ *diverge lorsque* $\beta\leq 1$.
6. *Montrer enfin que la série* $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ *converge lorsque* $\beta>1$.

1. *Pour* $\beta\in\mathbb{R}$ *fixé, la fonction* $f_\beta : x\mapsto\frac{1}{x(\ln(x))^\beta}$ *est dérivable sur* $[2;+\infty[$, *et*

$$\forall x\geq 2,\quad f_\beta'(x)=-\frac{(\ln(x))^\beta+x\beta(\ln(x))^{\beta-1}\times\frac{1}{x}}{x^2(\ln(x))^{2\beta}}=-\frac{\beta+\ln(x)}{x^2(\ln(x))^{\beta+1}}.$$

Puisque $x^2(\ln(x))^{\beta+1}>0$ *pour tout* $x\geq 2$, *on en déduit que la dérivée* f_β' *a le même signe que* $-(\ln(x)+\beta)$, *on a donc* $f_\beta'(x)\leq 0$ *pour* $x\geq e^{-\beta}$ *(et* $x\geq 2$*).*
En posant $n_0=\max\left(2;e^{-\beta}\right)$, *on a donc* f_β *décroissante sur* $[n_0;+\infty[$.

2. *Soit* $k \geq n_0 + 1$. *La fonction* f_β *étant décroissante sur l'intervalle* $[k-1;k] \subset [n_0;+\infty[$ *(d'après la question précédente), on a*

$$\forall t \in [k-1,k], \quad f_\beta(k) \leq f_\beta(t) \leq f_\beta(k-1),$$

donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_{k-1}^{k} f_\beta(k)dt \leq \int_{k-1}^{k} f_\beta(t)dt \leq \int_{k-1}^{k} f_\beta(k-1)dt,$$

c'est-à-dire :

$$f_\beta(k) \leq \int_{k-1}^{k} f_\beta(t)dt \leq f_\beta(k-1).$$

En raisonnant de même sur l'intervalle $[k;k+1]$ *(où la fonction* f_β *est aussi décroissante), on obtient l'encadrement :*

$$\int_{k}^{k+1} f_\beta(k+1)dt \leq \int_{k}^{k+1} f_\beta(t)dt \leq \int_{k}^{k+1} f_\beta(k)dt,$$

c'est-à-dire :

$$f_\beta(k+1) \leq \int_{k}^{k+1} f_\beta(t)dt \leq f_\beta(k).$$

En combinant les deux encadrements obtenus, on aboutit à :

$$\int_{k}^{k+1} f_\beta(t)dt \leq f_\beta(k) \leq \int_{k-1}^{k} f_\beta(t)dt.$$

3. *Soit* $n \geq n_0 + 1$. *En sommant les inégalités précédemment obtenues pour* k *allant de* $n_0 + 1$ *à* n, *on obtient par croissance de la somme :*

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k}^{k+1} f_\beta(t)dt \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} f_\beta(k) \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f_\beta(t)dt.$$

En utilisant la relation de Chasles avec ces intégrales, ceci se réécrit :

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f_\beta(t)dt \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} f_\beta(k) \leq \int_{n_0}^{n} f_\beta(t)dt$$

4. *En posant* $u(t) = \ln(t)$, *on a* $f_\beta(t) = \frac{1}{t}(\ln(t))^{-\beta} = u'(t)u^{-\beta}(t)$, *donc :*
   - *si* $\beta \neq 1$, *alors une primitive de* f_β *sur* $[2;+\infty[$ *est :*

$$F_\beta(t) = \frac{u^{-\beta+1}(t)}{-\beta+1} = \frac{(\ln(t))^{-\beta+1}}{-\beta+1}.$$

   - *si* $\beta = 1$, *alors* $f_\beta(t) = \frac{u'(t)}{u(t)}$, *donc une primitive de* f_β *sur* $[2;+\infty[$ *est :*

$$F_\beta(t) = \ln(u(t)) = \ln(\ln(t)).$$

5. *Supposons que* $\beta \leq 1$*. D'après l'encadrement établi à la question C3, on obtient la minoration :*

$$\forall n \geq n_0+1, \qquad \sum_{k=n_0+1}^{n} f_\beta(k) \geq F_\beta(n+1) - F_\beta\left(n_0+1\right).$$

   - *si* $\beta < 1$*, alors ceci se réécrit :*

$$\forall n \geq n_0+1, \qquad \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} \geq \frac{(\ln(n+1))^{-\beta+1} - (\ln\left(n_0+1\right))^{-\beta+1}}{-\beta+1}.$$

     Puisque $-\beta+1>0$*, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n+1))^{-\beta+1}-(\ln(n_0+1))^{-\beta+1}}{-\beta+1} = +\infty$$

     donc par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} = +\infty$*, ce qui montre que la série* $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ *diverge.*

   - *si* $\beta = 1$*, alors ceci se réécrit :*

$$\forall n \geq n_0+1, \qquad \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln\left(\ln\left(n_0+1\right)\right),$$

     donc la conclusion est identique : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = +\infty$*, donc la série* $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ *diverge.*

6. *Supposons que* $\beta > 1$*. D'après l'encadrement établi à la question C3, on obtient la majoration :*

$$\forall n \geq n_0+1, \qquad \sum_{k=n_0+1}^{n} f_\beta(k) \leq F_\beta(n) - F_\beta\left(n_0\right),$$

   ce qui se réécrit :

$$\forall n \geq n_0+1, \qquad \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} \leq \frac{(\ln(n))^{-\beta+1} - (\ln\left(n_0\right))^{-\beta+1}}{-\beta+1}.$$

   Puisque $-\beta+1<0$*, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^{-\beta+1}-(\ln(n_0))^{-\beta+1}}{-\beta+1} = \frac{(\ln(n_0))^{-\beta+1}}{\beta-1}.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{n=n_0+1}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^\beta}$ *est majorée par une suite convergente, donc elle est elle même majorée.*
On sait que (S_n) *est croissante (le terme général de la série étant positif) et majorée donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite* (S_n) *est convergente, donc la série* $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ *converge .*

Exercice 0.4. *1. Soit* $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2, a_i \in \mathbb{R}\}$ *l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit* $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$ *? On considère l'application*

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \mapsto (X+1)P'$$

(a) *Montrer que* f *est linéaire.*

(b) *Montrer que la matrice* A *de* f *par rapport aux bases* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}$ *est :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) *Montrer que* $\mathscr{B}' = (1, X+1, (X+1)^2)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

(d) *Trouver la matrice* B *de* f *par rapport aux bases* $\mathscr{B}'$ *et* $\mathscr{B}'$.

(e) *Calculer* A^2, A^3 *et* B^k *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

(f) *Déterminer le rang de* f.

(g) *Trouver une base de l'image de* f.

(h) *Trouver une base de noyau de* f.

(a) *Si* $\in \mathbb{R}_2[X], d^\circ(X+1)P' \leq 1+2-1 = 2$ *donc* f *est bien une application de* $\mathbb{R}_2[X]$ *dans* $\mathbb{R}_2[X]$.

$$f(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2) = (X+1)(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2)' =$$
$$(X+1)(\lambda_1P_1' + \lambda_2P_2') = \lambda_1(X+1)P_1' + \lambda_2(X+1)P_2' =$$
$$\lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$$

donc f *est linéaire, c'est même un endomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$.

(b)

$$f(1) = (X+1) \times 0 = 0 = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2$$
$$f(X) = (X+1) \times 1 = 0 = 1 \times 1 + 1 \times X + 0 \times X^2$$
$$f\left(X^2\right) = (X+1) \times 2X = 0 = 0 \times 1 + 2 \times X + 2 \times X^2$$

Donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\alpha+\beta(X+1)+\gamma(X+1)^2=0 \Leftrightarrow \gamma X^2+(\beta+2\gamma)X+\alpha+\beta+\gamma=0$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\gamma=0\\ \beta+2\gamma=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{array}\right.$

Donc $\mathscr{B}'$ est une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 ($\dim \mathbb{R}_2[X]=3$), c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(d)
$$f(1)=(X+1)\times 0=0=0\times 1+0\times X+0\times X^2$$
$$f(X+1)=(X+1)\times 1=0=0\times 1+1\times(X+1)+0\times(X+1)^2$$
$$f\left((X+1)^2\right)=(X+1)\times 2(X+1)=0=0\times 1+0\times(X+1)+2\times(X+1)^2$$

Donc : $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(e)
$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&6\\0&0&4\end{pmatrix}$$
$$A^3=AA^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&6\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&6\\0&1&14\\0&0&8\end{pmatrix}$$
$$B^k=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2^k\end{pmatrix}$$

Et $B^0=I$

(f) *La première colonne de la matrice A est nulle, donc le rang de A est inférieur ou égal à 2 , les deux suivantes ne sont pas proportionnelles, donc le rang de A est au moins 2 .*
$$\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(f)=2$$

(g) $\operatorname{Im}(f)$ *est engendré par* $f(X)=1+X$ *et* $f\left(X^2\right)=2X+2X^2$, *cette famille constitue une base de* $\operatorname{Im}(f)$.

(h) *D'après le théorème du rang, la dimension du noyau de f est 1 , car :*
$$\dim(\ker(f)+\dim(\operatorname{Im}(f)=\dim\mathbb{R}_2[X]=3$$
Or $f(1)=0$, donc le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par le polynôme constant égale à 1.

2. *Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base β est :*
$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\-3&1&0&-2\end{pmatrix}$$

(a) *Déterminer un vecteur a qui engendre le noyau de u.*

(b) *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^4, u(x) = \lambda x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.*

(c) *Trouver un vecteur directeur b de E_{-1}. Déterminer une base (c, d) de E_1.*

(d) *Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.*

(e) *Déterminer la matrice de u dans la base β'.*

(a) $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow AX = O$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 = -x_4 \\ x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_4 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 = -x_4 \\ x_3 = 0 \\ 3x_4 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_4 \\ x_1 = -x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = -x_4 \end{cases}$$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_4, -x_4, 0, x_4) = x_4(-1, -1, 0, 1)$

$a = (-1, -1, 0, 1)$ *engendre* $\ker(u)$.

(b)

$$u\left(0_{\mathbb{R}^4}\right) = 0_{\mathbb{R}^4} = \lambda 0_{\mathbb{R}^4}, \ \textit{donc } 0_{\mathbb{R}^4} \in E_\lambda$$

Soient x et y deux vecteurs de E_λ, on a $u(x) = \lambda x$ et $f(y) = \lambda y$
Par conséquent :

$$u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y) = \alpha\lambda x + \beta\lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$$

Ce qui montre que $\alpha x + \beta y \in E_\lambda$.

Ainsi, E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(c) $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_{-1} \Leftrightarrow u(x) = -x \Leftrightarrow AX = -X$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = -x_1 \\ x_1 + x_4 = -x_2 \\ x_3 = -x_3 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_4 = -x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_4 = -2x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_4 = -2x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1, 0, -2x_1) = x_1(1, 1, 0, -2)$

Donc $b = (1, 1, 0, -2)$ *engendre* E_{-1}.

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_1 \Leftrightarrow u(x) = x \Leftrightarrow AX = X$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = x_1 \\ x_1 + x_4 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ \{-3x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_4, 0, x_3, x_4) = x_3(0, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1)$

On pose $c = (0, 0, 1, 0)$ *et* $d = (-1, 0, 0, 1), (c, d)$ *engendrent* E_1, *de plus ils ne sont pas colinéaires, donc ils forment une famille libre, c'est une base de* E_1.

(d) *En développant par rapport à la troisième colonne :*

$$\det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Donc (a, b, c, d) *est une base de* $\mathbb{R}^4$.

(e) *D'après les questions précédentes on a*

$$u(a) = 0_{\mathbb{R}^4}; u(b) = -b; u(c) = c \text{ et } u(d) = d$$

Donc :

$$\mathrm{Mat}_{\beta'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$