Concours blanc

Durée : 4 heures
Calculatrice interdite

Exercice 0.1. *On considère l'équation différentielle :*

$$(E) : (1-x^2)y' - xy = x.$$

1. *Préciser les intervalles sur lesquels l'équation (E) peut être résolue.*
2. *Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à l'équation (E).*
3. *Donner les solutions de l'équation différentielle sur chacun des trois intervalles obtenus à la Q.1. (On pourra chercher une solution particulière égale à une fonction affine $f(x) = ax + b$).*
4. *Déterminer l'unique solution f de (E) sur $]-1;1[$ vérifiant $f(0) = 0$.*
5. *Soit la fonction f définie sur $]-1;1[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1$ dont on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative dans un repère orthonormé.*
   (a) *Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.*
   (b) *Donner un développement limité à l'ordre 3 de f en 0.*
   (c) *En déduire l'équation de la tangente T_0 à la courbe de f au point d'abscisse 0.*
   (d) *Quelles sont les positions relatives de T_0 et de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0 ?*
   (e) *Quelle est la parité de f ?*
   (f) *Étudier les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.*
   (g) *Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.*

Exercice 0.2. *On pose :*

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $\mathscr{B} = \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
On note ϕ l'application qui, à toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, associe la matrice

$$\phi(M) = AM - MA$$

.

1. *Démontrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.*
2. *Déterminer $Ker(\phi)$.*
3. *Déterminer la matrice B de ϕ dans la base $\mathscr{B}$.*
4. *Déterminer $Im(\phi)$.*
5. (a) *Démontrer que $Ker(\phi)$ et $Im(\phi)$ sont en somme directe.*
   (b) *Vérifier que $I \in Ker(\phi)$.*
   (c) *Etablir qu'alors qu'il n'existe aucune matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\phi(M) = I$.*
6. *On considère les matrices $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.*
   (a) *Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = \{A, K_1, K_2, K_3\}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.*
   (b) *Écrire la matrice D de ϕ dans la base $\mathscr{B}'$.*

Exercice 0.3. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs réelles telle que pour tout $x \geq 0$:*

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. (a) *Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer f'.*
   (b) *Dresser le tableau de variation de f. Placer les réels 1 et $f(1)$ dans ce tableau.*
2. (a) *Démontrer que pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n \in [0;1]$.*
   (b) *Établir l'inégalité suivante :*
   $$\forall x \in [0;1], | f'(x) | \leq \frac{3}{4}$$
   (c) *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :*
   $$| u_{n+1} - 1 | \leq \frac{3}{4} | u_n - 1 |$$
   (d) *Établir l'inégalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:*
   $$| u_n - 1 | \leq \frac{1}{2} \times (\frac{3}{4})^n$$
   (e) *En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.*
3. *Soient A, J et I les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) *Démontrer que* $J^2 = 2J$ *et en déduire* J^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) *En remarquant que* $A = I + J$, *établir pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *l'égalité suivante :*

$$A^n = I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J$$

(c) *Donner sous forme matricielle l'expression de* A^n *en fonction de* n.

4. *On note* (p_n) *et* (q_n) *les suites définies par :*

$$p_0 = 1, q_0 = 2 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n + 2q_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

(a) *Établir que pour tout* $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.

(b) *En déduire l'expression de* X_n *en fonction de* n *et donner les expressions de* p_n *et* q_n *en fonction de* n.

5. (a) *A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{p_n}{q_n}$.

(b) *Donner l'expression de* u_n *en fonction de* n *puis retrouver la limite de la suite* (u_n).