

# Programme de khôlle 13

Semaine du 18 décembre 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

## 1 Pratique calculatoire

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a)  $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$  sur  $\mathbb{R}$  ;

(b)  $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$  sur  $] -1, +\infty[$  ;

(c)  $y' - \frac{y}{x} = x^2$  sur  $]0, +\infty[$  ;

2. Déterminer les solutions réelles des problèmes de Cauchy suivants :

(a)  $y'' + y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 2$

(b)  $y'' + y' + y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = -1$

(c)  $y'' + 2y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$

## 2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

**Exercice 2.1.** *Trouver toutes les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle :*

$$x^2 y'' + x(x+1)y' - y = 0$$

*Exprimer cette solution à l'aide des fonctions usuelles.*

**Exercice 2.2.** 1. *Donner le rayon de convergence et exprimer la somme en termes de fonction usuelle de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ .*

2. *Résoudre sur  $\mathbb{R}^{+*}$  l'équation différentielle suivante :*

$$x(1 + (\ln(x))^2) y' + 2 \ln(x)y = 1.$$

**Indication :** *on pourra s'intéresser à la dérivée de la fonction :*

$$A(x) = \ln(1 + (\ln(x))^2).$$

**Exercice 2.3.** 1. Donner le rayon de convergence et exprimer la somme en termes de fonction usuelle de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$ .

**Indication :** on pourra chercher  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\frac{n+2}{n+1} = a + \frac{b}{n+1}$

2. Résoudre sur  $] -1; 1[$  l'équation différentielle suivante :

$$(t^2 - 1) y' + ty = t^3 - t.$$

### Chap.9 : Séries entières

1 Convergence d'une série entière

2 Méthodes de calcul du rayon de convergence

3 Cas d'une série entière d'une variable réelle

3.1 Fonction somme

3.2 Continuité, dérivabilité

3.3 Intégration terme à terme

4 Développement d'une fonction en série entière

5 Application des développements en série entière

5.1 Calcul de la somme d'une série entière

5.2 Recherche d'une solution particulière d'une équation différentielle

6 Exponentielle complexe

### Chap.10 : Équations différentielles scalaires

1 Généralités sur les équations différentielles linéaires

2 E.D. scalaires linéaires d'ordre 1

2.1 La théorie

2.1.1 Problème de Cauchy

2.1.2 Structure de l'ensemble des solutions

2.2 Résolution en pratique

3 E.D. scalaires linéaires d'ordre 2

3.1 La théorie

3.1.1 Problème de Cauchy

3.1.2 Structure de l'ensemble des solutions

3.2 E.D. linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

- 3.3 E.D.linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants.
- 3.3.1 Méthode de Lagrange (ou d'abaissement d'ordre)
- 3.3.2 Changement de variable