Programme de khôlle 8

Semaine du 13 novembre 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \frac{n}{n^3+1}$
2. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$
3. $u_n = n\sin(1/n)$
4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
5. $u_n = \frac{(-1)^n+n}{n^2+1}$
6. $u_n = \frac{1}{n!}$
7. $u_n = \frac{3^n+n^4}{5^n-2^n}$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer les valeurs propres de A.*
2. *Uniquement à l'aide de la question 1., est-il possible de répondre à la question "A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?".*
   Si oui, répondre à la question.
3. *Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.*
4. *En déduire une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.*

Exercice 2.2. *On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ défini par :*

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM - MA$$

avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1. *Démontrer que le polynôme caractéristique de f vaut $\chi_f(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2$.*
2. *Déterminer le spectre de f.*
3. *L'application f est-elle bijective ?*
4. *Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de f.*
5. *L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Si oui, donner alors une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de f est diagonale et expliciter cette matrice diagonale.*

Exercice 2.3. *On considère E un espace vectoriel de dimension finie n.*

1. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ admettant une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. Démontrer que le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E qui est stable par f.*
2. *Soit p un projecteur de E. Montrer que* $\mathrm{sp}(p) \subset \{0; 1\}$.
3. *Soit s une symétrie vectorielle de E. Montrer que* $\mathrm{sp}(s) \subset \{-1; 1\}$.

Chap.5 : Séries numériques

1 Généralités sur les séries 1.1 Définitions
1.2 Séries télescopiques
1.3 Propriétés
1.4 Convergence absolue

2 Séries de référence
2.1 Série géométrique
2.2 Séries de Riemann

3 Règles de convergence sur les séries à termes positifs
3.1 Majoration des sommes partielles
3.2 Critère de comparaison
3.3 Critère des équivalents
3.4 Règle de D'Alembert
3.5 Une comparaison série-intégrale

4 Développement décimal d'un nombre réel

Chap.6 : Réduction des endomorphismes et des matrices

1 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice
1.1 Valeurs propres, vecteurs propres
1.2 Sous-espaces propres
1.3 Polynôme caractéristique