# Interrogation 5 - CORRECTION

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère $G$ le sous-espace vectoriel défini par les équations :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de $G$.
On commence par trouver une base de $G$. Mais on a :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = -x \\ z = z \\ t = -z. \end{cases}$$

On en déduit que $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$ est une base de $G$.
Ces deux vecteurs sont déjà orthogonaux, il suffit de les normaliser.
Si on pose $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1)$, alors $\{u_1, u_2\})$ est une base orthonormale de $G$.

2. Déterminer la matrice dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale $p_G$ sur $G$.
On sait que $\{u_1, u_2\})$ est une base orthonormale de $G$ donc on peut calculer $p_G(e_i)$ par la formule :

$$p_G(e_i) = \langle e_i, u_1 \rangle u_1 + \langle e_i, u_2 \rangle u_2.$$

On en déduit que la matrice de $p_G$ dans la base canonique est :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un élément de $E$. Déterminer la distance de $x$ à $G$.
On sait que $d(x, G) = \|x - p_G(x)\|$.
Écrivons $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Alors :

$$p_G(x) = \langle x, u_1 \rangle u_1 + \langle x, u_2 \rangle u_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2, -x_1 + x_2, x_3 - x_4, -x_3 + x_4)$$

et donc :

$$x - p_G(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_3 + x_4).$$

Il vient :

$$d(x, G)^2 = \frac{1}{2}\left((x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2\right)$$