Programme de khôlle 10
Semaine du 2 décembre 2024

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou Python(15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

Les documentions CCS et CCINP sont autorisées.
Rédiger en langage Python une fonction :

1. ***lancer_dé(n)*** qui simule n lancers d'un dé équilibré à 6 faces et qui renvoie la moyenne des numéros obtenus.
2. ***gain(n)*** qui simule n lancers d'un dé à 8 faces et qui renvoie le gain selon la règle suivante : à chaque lancer, on gagne 3 euros si on obtient un multiple de 3, on perd 2 euros si on obtient 5 et le gain est nul sinon.
3. ***jeu_piece(n)*** qui simule l'expérience suivante et qui renvoie le gain final : on lance n fois une pièce de monnaie. On gagne 2 euros si on obtient un Face et on perd 1 euro sinon.

2 Question de cours

1. Définir un système complet d'événements et donner la formule de Bayes.
2. (a) Formule des probabilités composées.
   (b) Mutuelle indépendance d'une famille d'événements, illustration du cas $n = 3$.
3. Formule des probabilités totales, illustration dans le cas $n = 3$.

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque étudiant résoudra un des quatre exercices :

Exercice 3.1. *Une boite contient deux jetons : un noir et un rouge.*
On tire n fois un jeton dans cette boite en le remettant après avoir noté sa couleur.

On note A_n l'événement "on obtient des jetons des deux couleurs au cours des n tirages" et B_n l'événement "on obtient au plus un jeton noir".

1. *Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.*
2. *A_n et B_n sont-ils indépendants si $n = 2$?*
3. *Même question si $n = 3$.*

Exercice 3.2. *(Traité en classe)*
On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :

- *si l'appareil fonctionne à l'instant $n-1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, il a la probabilité $\frac{1}{6}$ d'être en panne à l'instant n.*
- *si l'appareil est en panne à l'instant $n-1$, il a la probabilité $\frac{2}{3}$ d'être en panne à l'instant n.*

On note F_n l'événement "l'appareil est en état de marche à l'instant n" et p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant n $(p_n = P(F_n))$.

1. *Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une relation entre p_n et p_{n-1}.*
2. *On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, q_n = p_n - \frac{2}{3}$. Quelle est la nature de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire une expression de q_n en fonction de n et p_0.*
3. *Exprimer p_n en fonction de n et de p_0.*
4. *Étudier la convergence de la suite (p_n).*

Exercice 3.3. *Un professeur oublie fréquemment ses clés. On suppose que le premier jour, il les oublie avec une probabilité $p_1 \in [0,1]$. Ensuite, si un jour donné il les oublie, le jour suivant il les oublie avec une probabilité $1/10$. A contrario, s'il ne les oublie pas un jour donné, le lendemain il les oublie avec la probabilité $4/10$. On note p_n la probabilité que le professeur oublie ses clés le n-ième jour.*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.*
2. *Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = p_n - \frac{4}{13}$$
est géométrique.
3. *En déduire une expression de p_n en fonction de p_1 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
4. *Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter le résultat.*

Exercice 3.4. *Dans un laboratoire, on a fait les constats suivants :*

- *si une souris porte l'anticorps A, alors 2 fois sur 5 elle porte aussi l'anticorps B ;*
- *si une souris ne porte pas l'anticorps A, alors 4 fois sur 5 elle ne porte pas l'anticorps B.*

La moitié de la population porte l'anticorps A.

1. *Calculer la probabilité que, si une souris porte l'anticorps B, alors elle porte aussi l'anticorps A.*
2. *Calculer la probabilité que, si une souris ne porte pas l'anticorps B, alors elle ne porte pas l'anticorps A.*

Chap.6 : Réduction des endomorphismes et des matrices

1 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

2 Les propriétés utiles des éléments propres

3 Matrice ou endomorphisme diagonalisable

4 Matrice ou endomorphisme trigonalisable

5 Applications de la réduction

6 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Chap.7 : Probabilités sur un univers dénombrable

1 Rappels de vocabulaire
1.1 Expérience aléatoire
1.2 Univers
1.3 Événement
1.4 Système complet d'événements

2 Espaces probabilisés
2.1 Espace probabilisé fini
2.2 Espace probabilisé dénombrable

3 Calculer une probabilité
3.1 Propriétés de base
3.2 Utilisation des événements élémentaires

4 Probabilité conditionnelle
4.1 Définition
4.2 Formules
4.2.1 Formule des probabilités composées
4.2.2 Formule des probabilités totales
4.2.3 Formule de Bayes

5 Indépendance d'événements