Chap.10 : Résolution numérique d'équations

Introduction :

L'équation $x^5+3x^3-1=0$ admet-elle une solution ? Quelle est le nombre exact de solutions ?

Nous allons voir dans ce chapitre comment évaluer numériquement une solution d'équation de la forme $f(x)=0$ avec f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Deux méthodes vont être présentées :

• **La méthode de dichotomie** approche une solution avec p bits significatifs en p étapes, ce qui est déjà très efficace. Ses conditions d'utilisation sont assez simples : on demande seulement à la fonction d'être continue et de changer de signe. Ceci en fait une méthode robuste.

• **La méthode de Newton** a une vitesse de convergence très élevée : à chaque étape supplémentaire, le nombre de bits (ou décimales) significatifs correct(e)s peut être multiplié par deux ! On peut atteindre par exemple une précision de 50 bits en sept étapes. En contrepartie, elle nécessite un ensemble de conditions d'application parfois délicat à vérifier.

I Méthode de dichotomie.

Soit $f(x)=x^5+3x^3-1$. Il s'agit de trouver la solution α de l'équation $f(x)=0$.

1°) Calculer $f(0)$ et $f(1)$. En déduire un encadrement de α .

2°) Calculer $f(0,5)$. En déduire un encadrement plus précis de α .

3°) Compléter le tableau suivant :

a	b	$\dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(\dfrac{a+b}{2})$	$f(b)$
0	1				
0,5					

4°) Notons $[a_n;b_n]$ l'encadrement de α obtenu à la n ième étape. Comment déterminer l'encadrement plus précis suivant ?

5°) Comparer b_n-a_n et $b_{n+1}-a_{n+1}$. Qu'en déduire sur la précision de l'encadrement ?

6°) Soit $\varepsilon>0$. Rédiger un algorithme permettant d'obtenir un encadrement de α d'amplitude inférieure à ε sachant au départ que $\alpha\in[a;b]$.

7°) Pourquoi l'algorithme se terminera-t-il ?

8°) Combien de fois la boucle sera-t-elle exécutée ?

9°) Combien y aura-t-il d'itérations pour une précision de :

ε	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-9}	10^{-12}
Nombre d'itérations					

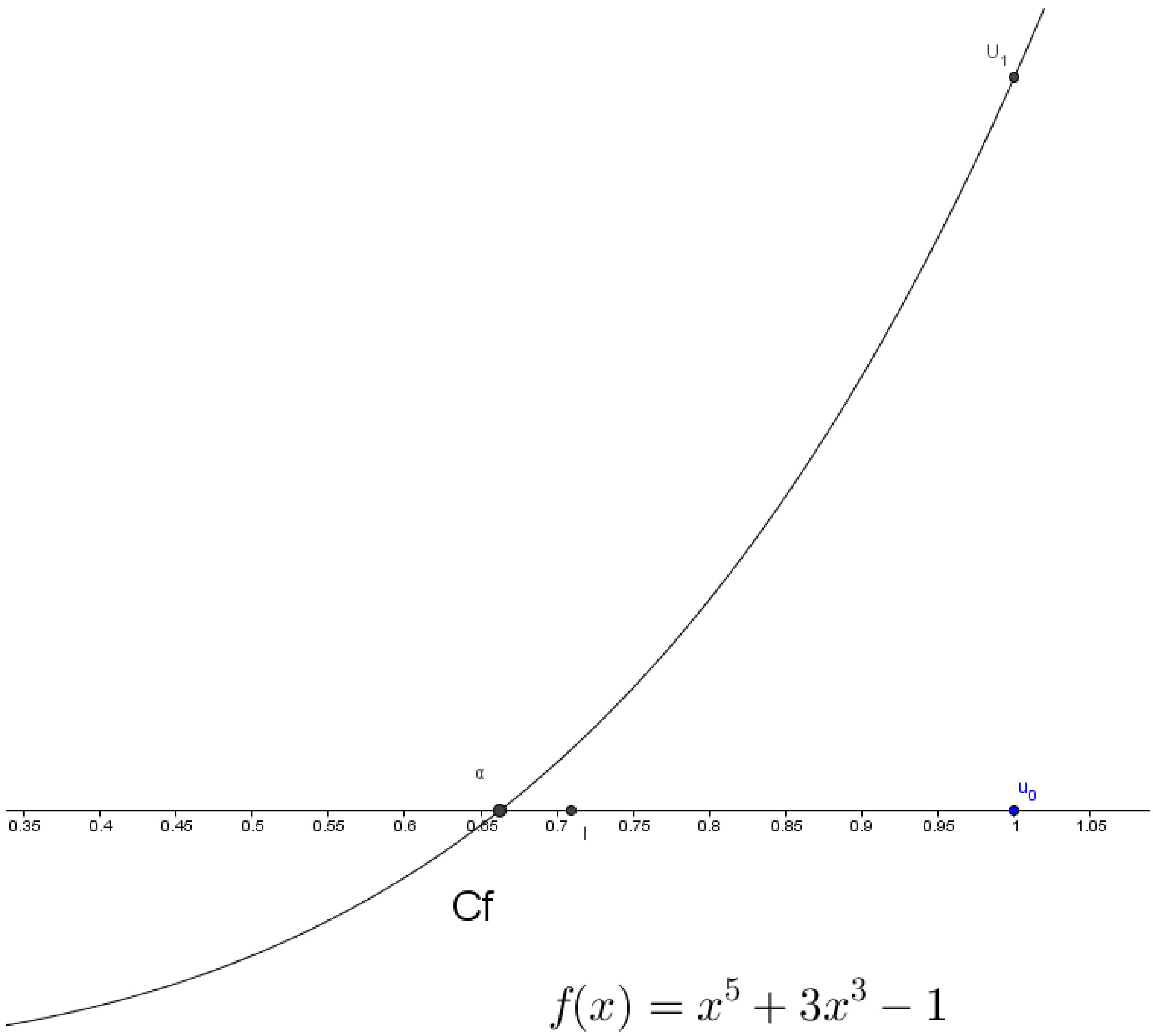
II Méthode de Newton.

Soit $a \in [0;1]$ une valeur approchée (grossière) de α .
La tangente T_a à la courbe de f au point d'abscisse a est une approximation affine de la courbe.
La fonction $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ est une approximation affine de f en a .

1°) En quel point la tangente T_a coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Notons u_1 son abscisse.
2°) u_2 l'intersection de la tangente au point d'abscisse u_1 avec l'axe des abscisses. Quelle relation existe-t-il entre u_2 et u_1 ?

2°) Revenons à l'équation $f(x) = x^5 + 3x^3 - 1 = 0$ et notons $u_0 = a = 1$.

a) Calculer la valeur exacte de u_1 .
b) Construire u_1 et u_2 sur le graphique.



c) u_2 est-il une meilleure approximation de α que u_1 ?

3°) L'algorithme de Newton consiste à itérer ce processus en créant la suite $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \end{cases}$.

a) Donner une expression explicite de u_{n+1} en fonction de u_n.

b) Saisir la suite dans la calculatrice et compléter :

n	u_n
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

c) Combien faut-il d'itérations pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-5} ? à 10^{-15} ?
d) Comparer avec la méthode de dichotomie : laquelle est la plus performante ?

4°) Soit $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \end{cases}$. Posons $\varepsilon_n = u_n - \alpha$.

a) Que représente ε_n ?
b) Posons $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ alors $g(\alpha) =$ et $g(u_n) =$
c) Exprimer $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}$ en fonction de g' si $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
d) On peut montrer que $|g'(x)| < k$ sur $[0,65;1]$. Montrer qu'alors $|\varepsilon_n| < k^n$.
e) Calculer $g'(\alpha)$. Qu'en déduire pour la vitesse de convergence de la suite ? Comment s'assurer d'une vitesse élevée ?

5°) Soit $\varepsilon > 0$. Rédiger un algorithme permettant d'obtenir un encadrement de α d'amplitude inférieure à ε .

III Quelle méthode choisir ?

On ne peut pas écrire une méthode universelle de résolution numérique d'équation de la forme $f(x) = 0$. On peut cependant chercher le meilleur compromis.

• Si on cherche la simplicité et la robustesse, la méthode dichotomique s'impose : la continuité de la fonction et un premier intervalle [a, b] tel que $f(a)f(b) \leq 0$ sont suffisants. La lenteur de cette méthode est toute relative.

• Si on connaît une bonne approximation d'un zéro et si on cherche la rapidité, alors on peut appliquer une méthode de la famille de Newton .

• Dans des situations intermédiaires, on peut pratiquer des méthodes mixtes, avec une première phase de localisation de zéros par dichotomie, puis des itérations de Newton.